

Fibras Ópticas

**ANÁLISE MODAL, PROPAGAÇÃO DE IMPULSOS
E DÉBITO BINÁRIO**

Prof. Carlos R. Paiva

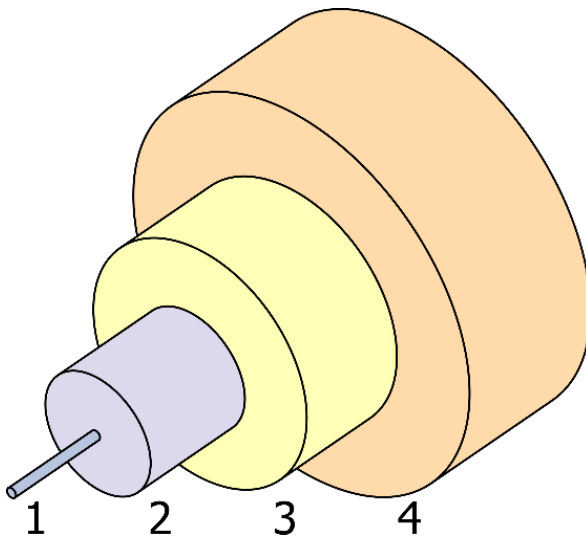
DEEC – Área Científica de Telecomunicações

Instituto Superior Técnico

Universidade de Lisboa

1. Introdução

A Fig. 1 representa a estrutura de um cabo de fibra óptica. As suas partes essenciais são:



1. Núcleo;
2. Bainha;
3. Revestimento primário;
4. Revestimento secundário.

Figura 1

Do ponto de vista óptico o núcleo (em inglês: *core*) e a bainha (em inglês: *cladding*) constituem as partes (mais) relevantes dos efeitos envolvidos. É costume caracterizar o índice de refração do núcleo por n_1 e o índice de refração da bainha por n_2 , com $n_1 > n_2$ (ou seja: o núcleo é opticamente mais denso que a bainha). A transmissão electromagnética ao longo de uma fibra óptica pode ser explicada, em termos de óptica geométrica, pela reflexão interna total – consequência da (conhecida) lei de Snell. Note-se que, em rigor, não se pode aplicar a lei de Snell: a geometria é cilíndrica (Fig. 2) e não planar.

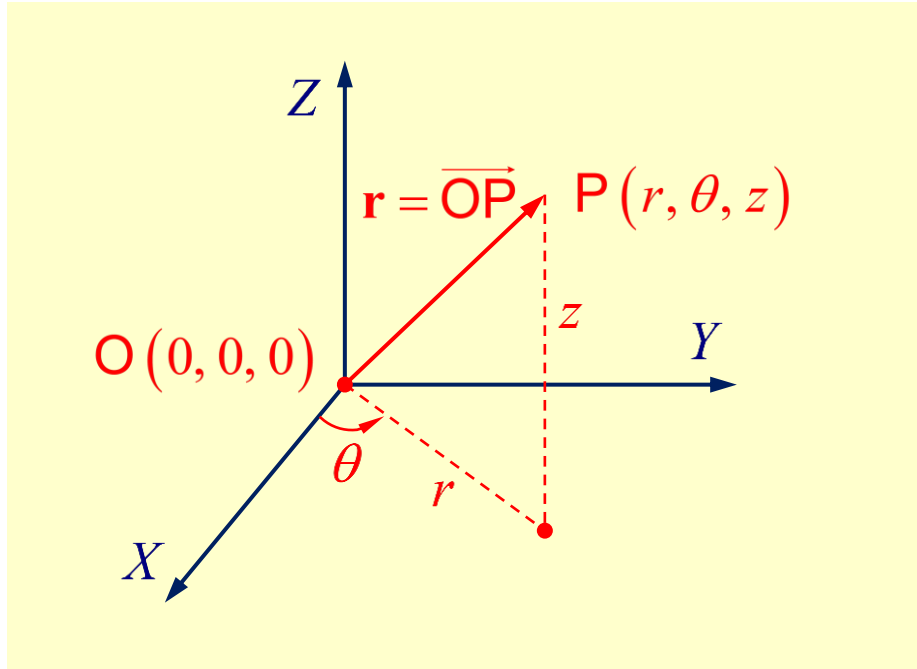


Figura 2

De acordo com a Fig. 2, o eixo da fibra é o eixo Z e a sua secção transversal é o plano XY descrito pelas coordenadas polares (r, θ) , com $r \geq 0$ e $0 \leq \theta < 2\pi$. Por exemplo: na Fig. 2 tem-se

$$\mathbf{r} = \overline{OP} = r [\cos(\theta) \mathbf{e}_1 + \sin(\theta) \mathbf{e}_2] + z \mathbf{e}_3.$$

Um campo vectorial $\mathbf{F} = \mathbf{F}(r, \theta, z)$ tem a forma genérica

$$\mathbf{F} = F_r(r, \theta, z) \mathbf{e}_r + F_\theta(r, \theta, z) \mathbf{e}_\theta + F_z(r, \theta, z) \mathbf{e}_z.$$

Além disso,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_r \\ \mathbf{e}_\theta \\ \mathbf{e}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix}.$$

A interface entre o núcleo e a bainha é a superfície cilíndrica $r = a$, i.e., considera-se que a é o raio do núcleo. Do ponto de vista electromagnético vai-se considerar que a bainha é ilimitada: sendo $r = \varrho$

a interface entre a bainha e o revestimento primário (ver Fig.1), admite-se que é possível considerar para efeitos de análise $\rho \rightarrow \infty$. O que esta hipótese realmente significa é que o campo electromagnético é (praticamente) desprezável na interface $r = \rho$. Consideramos, sempre, ondas electromagnéticas da forma

$$\exp[i(\beta z - \omega t)],$$

em que β é a constante de propagação longitudinal correspondente a uma certa frequência (angular) $\omega = 2\pi f$. A correspondente *velocidade de fase* é

$$v_p = \frac{\omega}{\beta}.$$

O problema central da análise modal consiste em determinar β para uma dada frequência ω , i.e.,

$$\boxed{\omega [\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}]} \mapsto \boxed{\beta [\text{rad} \cdot \text{m}^{-1}]}.$$

No vácuo é $\beta = k_0 = \omega/c$, no núcleo (considerado como meio ilimitado) é $\beta = n_1 k_0$, na bainha (também considerada como meio ilimitado) é $\beta = n_2 k_0$. Porém, na fibra – considerada como guia de ondas – é

$$\boxed{\beta = \bar{n} k_0} \Rightarrow \boxed{v_p = \frac{c}{\bar{n}}},$$

uma vez que $\omega = c k_0$ e onde \bar{n} é o chamado índice de refração modal. Como se verá, mais importante do que a velocidade de fase é a *velocidade de grupo* v_g , tal que

$$\boxed{v_g = \frac{\partial \omega}{\partial \beta}} \Rightarrow \boxed{v_g = \frac{c}{n_g}}.$$

O *índice de grupo* n_g é dado por (com $\lambda f = c$)

$$n_g = \frac{\partial \beta}{\partial k_0} = \frac{\partial}{\partial k_0} (\bar{n} k_0) = \bar{n} + k_0 \frac{\partial \bar{n}}{\partial k_0}$$

$$\therefore \boxed{n_g = \bar{n} + \omega \frac{\partial \bar{n}}{\partial \omega} = \bar{n} - \lambda \frac{\partial \bar{n}}{\partial \lambda}}.$$

Se uma fibra óptica tiver um comprimento L , o tempo de propagação T de um impulso é dado por

$$T = \frac{L}{v_g} = \frac{L}{c} n_g.$$

Aqui o índice de grupo é calculado em torno da frequência ω_0 (ou do correspondente comprimento de onda $\lambda_0 = 2\pi c / \omega_0$) da portadora (em inglês: *carrier*).

Uma análise (exclusivamente) em termos de óptica geométrica ($\lambda \rightarrow 0$) da fibra não é razoável pois, em geral, não é verdade que $a/\lambda \ll 1$. Todavia, existem algumas considerações que são válidas – pelo menos de forma qualitativa. Nomeadamente, em termos de óptica geométrica é razoável considerar a interface núcleo-bainha como (localmente) plana. E, deste modo, aplicar a correspondente lei de Snell (Fig.3):

$$\beta_1 = \beta_2 = \beta \quad \Rightarrow \quad n_1 \sin(\theta_1) = n_2 \sin(\theta_2).$$

A condição $\beta_1 = \beta_2$ decorre da continuidade (sobre a interface núcleo-bainha) de todas as componentes tangenciais do campo \mathbf{E} e do campo \mathbf{H} . Todas as componentes do campo electromagnético possuem termos da forma

$$\begin{cases} \text{núcleo } (r \leq a) & \mapsto \exp(i\beta_1 z) \\ \text{bainha } (r > a) & \mapsto \exp(i\beta_2 z) \end{cases} \Rightarrow \beta_1 = \beta_2.$$

Como $n_1 > n_2$ infere-se que $\theta_2 > \theta_1$. Existirá propagação guiada (ondas superficiais) na fibra óptica desde que $\theta_1 > \theta_c$, onde θ_c é o *ângulo crítico* tal que

$$\theta_2 = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \theta_1 = \theta_c = \sin^{-1}\left(\frac{n_2}{n_1}\right).$$

As ondas são *superficiais* no sentido em que o campo se anula quando se faz $r \rightarrow \infty$. Note-se, contudo, que – em reflexão interna total – a onda na bainha (localmente plana na aproximação da óptica geométrica) deverá ser (transversalmente) evanescente: $q = i\alpha$, com $\alpha > 0$. De facto, nestas condições.

$$r \rightarrow \infty \quad \Rightarrow \quad \exp(iqr) = \exp(-\alpha r) \rightarrow 0.$$

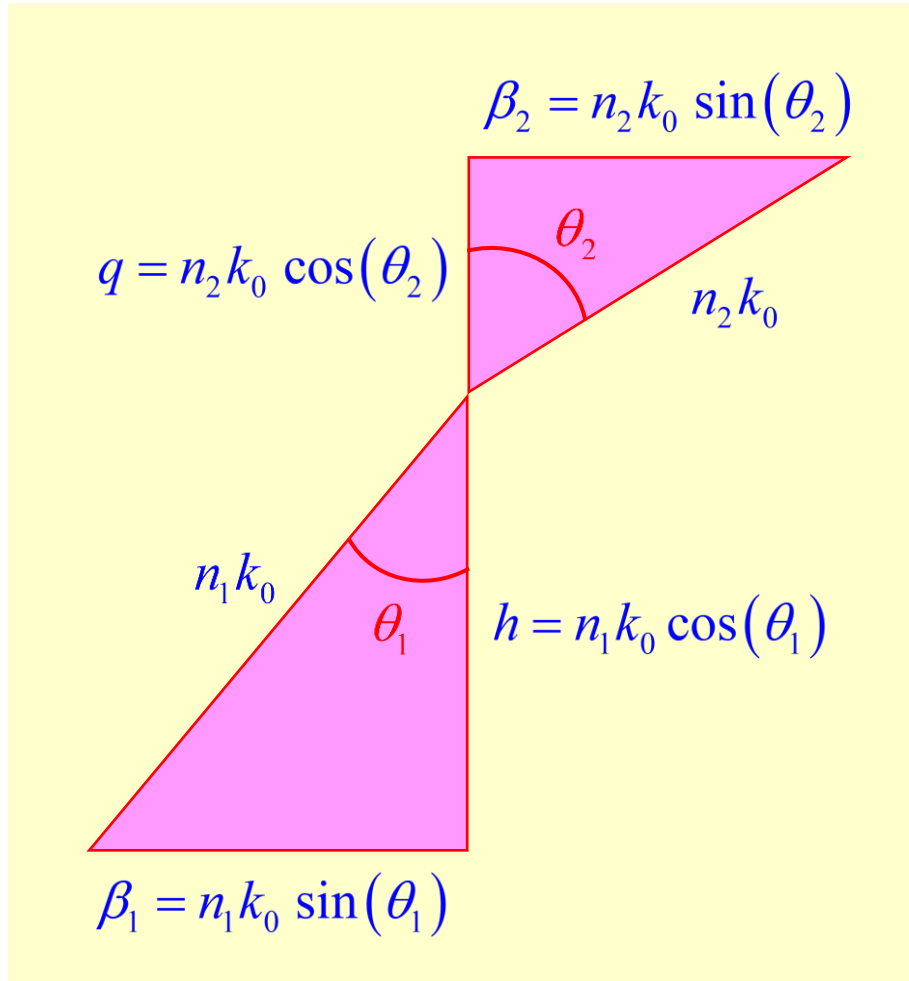


Figura 3

Porém, isso corresponde a ter um ângulo complexo:

$$\theta_2 = \frac{\pi}{2} - i\xi \in \mathbb{C} \Rightarrow q = n_2 k_0 \cos\left(\frac{\pi}{2} - i\xi\right) = n_2 k_0 \sin(i\xi) = i n_2 k_0 \sinh(\xi) = i\alpha.$$

Ou seja,

$$\boxed{\alpha = n_2 k_0 \sinh(\xi)}.$$

Dos dois triângulos rectângulos da Fig. 3 (fazendo $q = i\alpha$), vem então

$$\boxed{\begin{matrix} \beta^2 + h^2 = n_1^2 k_0^2 \\ \beta^2 + q^2 = n_2^2 k_0^2 \end{matrix}} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} \beta^2 + h^2 = n_1^2 k_0^2 \\ \beta^2 - \alpha^2 = n_2^2 k_0^2 \end{matrix}} \Rightarrow \boxed{h^2 + \alpha^2 = (n_1^2 - n_2^2) k_0^2}.$$

Note-se que se tem sempre, para qualquer modo superficial,

$$\boxed{n_2 k_0 \leq \beta < n_1 k_0} \Rightarrow \boxed{n_2 \leq \bar{n} = \frac{\beta}{k_0} < n_1}.$$

Na frequência (dita) de corte, é $\theta_1 = \theta_c$ (i.e., $\theta_2 = \pi/2$) e, conseqüentemente, $\beta = n_2 k_0$ (i.e., $\bar{n} = n_2$), $\alpha = \xi = 0$, $h = \sqrt{n_1^2 - n_2^2} k_0$. Quando a frequência aumenta ilimitadamente (i.e., $f \rightarrow \infty$), tem-se $\theta_1 \rightarrow \pi/2$ e, conseqüentemente, $\beta \rightarrow n_1 k_0$, de modo que $h \rightarrow 0$ e $\alpha \rightarrow \sqrt{n_1^2 - n_2^2} k_0$, a que corresponde uma valor máximo do parâmetro ξ , ξ_{\max} , tal que

$$\sinh(\xi_{\max}) = \frac{\sqrt{n_1^2 - n_2^2}}{n_2} \Rightarrow \xi_{\max} = \sinh^{-1} \sqrt{\frac{n_1^2}{n_2^2} - 1} = \ln(n_1 + \sqrt{n_1^2 - n_2^2}) - \ln(n_2).$$

A ocorrência de ângulos «complexos» para θ_2 deve-se a que estamos a forçar, neste caso, uma linguagem de raios – típica da óptica geométrica – sobre a realidade física da reflexão interna total.

A realidade electromagnética da fibra óptica só é tratada, de forma (completamente) apropriada, no interior da óptica electromagnética associada ao universo dos campos vectoriais.

Num sistema digital toda a informação é reduzida a um conjunto de *bits* (do inglês: *binary digits*). Consideremos, por exemplo, o armazenamento (na memória de um computador) de uma apresentação oral, de duração T (em minutos), no formato ASCII (do inglês: *American Standard Code for Information Interchange*). Suponhamos, então, que a apresentação corresponde a uma emissão média de $w = 200$ palavras por minuto e que cada palavra tem, em média, $c = 5$ letras. O número total de palavras dessa apresentação é $m = wT = 200T$ e o número total de letras (ou caracteres) é $M = cm = 5m = 10^3 T$. No formato ASCII cada caracter é codificado através de uma sequência de 7 *bits*. Logo, a apresentação corresponde a um total de $N_b = 7M = 7 \times 10^3 T$ *bits*. Por exemplo: se a apresentação durou 1 hora 30 minutos, então $T = 90$ minutos e, conseqüentemente, $N_b = 63 \times 10^4$ *bits*. Esta informação armazenada dura cerca de $\Delta t = 0.63$ ms a ser transmitida num sistema de

comunicação digital para um débito binário (em inglês: *bit rate*) $B = 1 \text{ Gb} \cdot \text{s}^{-1}$. Em geral, portanto, tem-se

$$\boxed{\Delta t = \frac{N_b}{B}} \Rightarrow \Delta t = 7 \frac{M}{B} = 7 \frac{cm}{B} \Rightarrow \boxed{\Delta t = 7 (cw) \left(\frac{T}{B} \right)}.$$

Neste capítulo da matéria a nossa atenção centra-se sobre as fibras de sílica (SiO_2 ou dióxido de silício) – um dos óxidos mais abundantes na crosta terrestre. Nos anos 60 do século XX as fibras ópticas (então) disponíveis apresentavam atenuações altíssimas, da ordem dos 1000 dB/km. Com estas atenuações as fibras ópticas eram completamente inúteis para a transmissão de informação a distância. De facto, por essa altura, os cabos coaxiais (linhas de transmissão que já existiam desde 1940) eram os sistemas de telecomunicações preferidos. Por volta de 1948 aparece uma alternativa mais promissora do que os cabos coaxiais: os sistemas de microondas.

Façamos algumas estimativas para ilustrar a necessidade de tecnologias a operar em portadoras com frequências (cada vez) mais altas.

Admitamos que um sistema digital de comunicações pode ser operado num débito binário B até 1% da frequência f_0 da portadora, i.e.,

$$B < B_{\max} = 10^{-2} f_0.$$

Um canal *digital* de áudio é operado num débito binário

$$\boxed{B_0 = 64 \text{ kb} \cdot \text{s}^{-1}}.$$

Comparemos, então, o número máximo N_{ch} de canais para duas portadoras, a saber:

- Uma portadora de microondas, com $f_0 = 5 \text{ GHz}$ (i.e., com $\lambda_0 = c / f_0 = 6 \text{ cm}$);
- Uma portadora óptica, com $\lambda_0 = c / f_0 = 1.55 \mu\text{m}$ (i.e., com $f_0 = 193.55 \text{ THz}$).

No primeiro caso, do sistema de microondas, o número máximo de canais áudio é de $N_{\text{ch}} = B_{\text{max}} / B_0 \approx 780$ canais. No segundo caso, do sistema fotónico, o número máximo de canais áudio é incomparavelmente maior: $N_{\text{ch}} = B_{\text{max}} / B_0 \approx 3 \times 10^7$ canais.

Deste modo, tudo apontava para que uma *revolução fotónica* tivesse lugar – desde que a tecnologia correspondente estivesse disponível.

Uma figura de mérito dum sistema de telecomunicações é o produto entre o débito binário B e a distância L da ligação. Interessa, para sistemas avançados de longo alcance (e.g., os cabos submarinos transoceânicos), que o produto BL seja o mais alto possível.

A construção do primeiro laser, por Theodore H. Maiman (1927 – 2007) em 1960, veio trazer a óptica até à vanguarda tecnológica (hoje em dia prefere-se o termo fotónica em substituição do termo óptica – uma terminologia mais tradicional). No entanto, o que se provou ser mais relevante – para a possibilidade de um sistema de telecomunicação por fibra óptica – foi o concurso de dois acontecimentos que (quase) ocorreram simultaneamente (por volta de 1970). A saber:

- O aparecimento de fontes ópticas compactas – os lasers semicondutores ou LD (do inglês: *laser diode*) – a funcionar, de forma termodinamicamente estável, à temperatura ambiente;
- A possibilidade de construir fibras ópticas monomodais, com atenuações inferiores a 20 dB/km, de forma a constituírem uma alternativa viável em relação aos cabos coaxiais.

O prémio Nobel da física de 2000 foi atribuído a três investigadores; dois de entre eles, Zhores I. Alferov e Herbert Kroemer, foram galardoados pelo seu trabalho pioneiro nos lasers semicondutores. O prémio Nobel da Física de 2009 foi atribuído (também) a três investigadores; a um deles, Charles Kuen Kao, foi-lhe reconhecida a investigação pioneira sobre a propagação da luz em fibras ópticas monomodais tendo em vista a viabilidade dos sistemas de comunicação óptica.

Actualmente fabricam-se fibras ópticas, operadas em 1.55 μm , com coeficientes de atenuação que se encontram (muito) perto (do limiar de Rayleigh) de 0.16 dB/km. Com efeito, desde 1979 que se

fabricam, para esta janela de transmissão, fibras com coeficientes de atenuação (da ordem) de $\alpha = 0.2 \text{ dB} \cdot \text{km}^{-1}$.

O parâmetro fundamental de uma fibra óptica é representado pelo número adimensional v , dado por

$$v = k_0 a \sqrt{n_1^2 - n_2^2} = 2\pi \frac{a}{\lambda} \sqrt{n_1^2 - n_2^2} = 2\pi \frac{a}{\lambda} n_1 \sqrt{2\Delta}.$$

A este parâmetro adimensional chama-se *frequência normalizada*. Na sua definição foi também introduzido um outro parâmetro Δ , denominado *contraste dielétrico*, tal que

$$\Delta = \frac{n_1^2 - n_2^2}{2n_1^2}.$$

Na definição do parâmetro v , $k_0 = 2\pi/\lambda$ (em que $\lambda = c/f$ é o comprimento de onda medido no vácuo) é a constante de propagação no vácuo e, tal como já se disse atrás, a representa o raio do núcleo da fibra óptica. Na Fig. 4 introduz-se o conceito de abertura numérica NA (em inglês: *numerical aperture*) e a sua relação com o contraste dielétrico Δ .

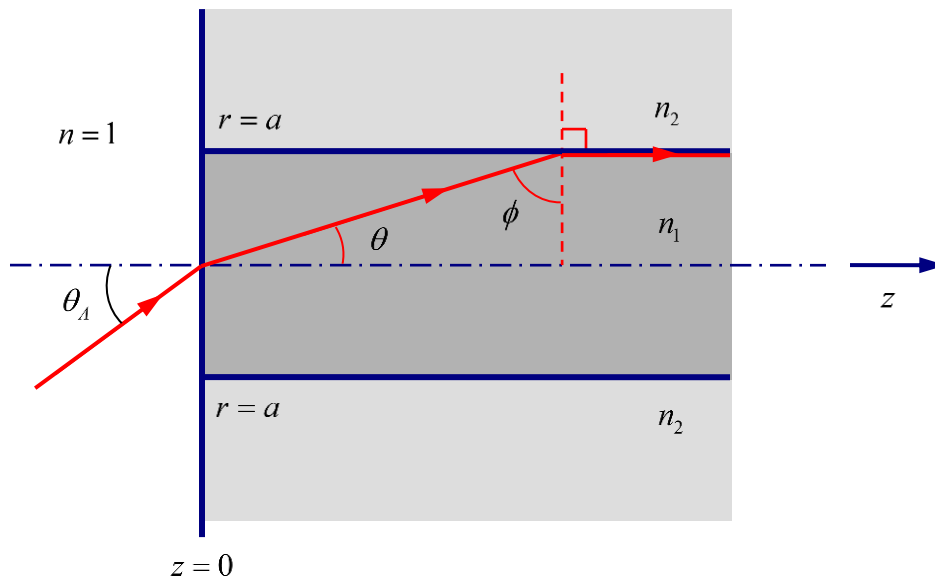


Figura 4

Como mostra a Fig. 4, em termos de óptica geométrica o ângulo de aceitação θ_A é tal que

$$\sin(\theta_A) = n_1 \sin(\theta).$$

Por definição,

$$\boxed{\text{NA} = \sin(\theta_A)}.$$

Mas, por outro lado, em resultado da reflexão interna total na interface núcleo-bainha, tem-se

$$\begin{cases} \phi = (\pi/2) - \theta \\ n_1 \sin(\phi) = n_2 \end{cases} \Rightarrow n_1 \cos(\theta) = n_2 \Rightarrow \sin(\theta) = \sqrt{1 - \frac{n_2^2}{n_1^2}} = \frac{1}{n_1} \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$$

$$\therefore \sin(\theta_A) = \sqrt{n_1^2 - n_2^2} \Rightarrow \boxed{\text{NA} = n_1 \sqrt{2\Delta}} \Rightarrow \boxed{v = 2\pi \frac{a}{\lambda} \text{NA}}.$$

A fibra é operada em *regime monomodal* desde que

$$\boxed{v < v_c = 2.4048}.$$

Assim,

$$2\pi \frac{a}{\lambda} n_1 \sqrt{2\Delta} < v_c \Rightarrow \boxed{a < a_{\max} = \frac{\lambda v_c}{2\pi n_1 \sqrt{2\Delta}}}.$$

Ou seja: a_{\max} é o valor máximo admissível que o raio do núcleo pode ter de forma a que a fibra funcione em regime monomodal (i.e., para que a dispersão intermodal desapareça e a dispersão total se reduza à dispersão intramodal cromática que, de forma aproximada, é a soma da dispersão material com a dispersão estrutural).

Por exemplo:

$$\begin{cases} \lambda = 1.55 \mu\text{m} \\ n_1 = 1.50 \\ \Delta = 4 \times 10^{-3} \end{cases} \Rightarrow a_{\max} = 4.42 \mu\text{m}.$$

Na Fig. 5 representa-se graficamente a variação de a_{\max} com Δ para $n_1 = 1.45$ e considerando que $\lambda = 1.55 \mu\text{m}$.

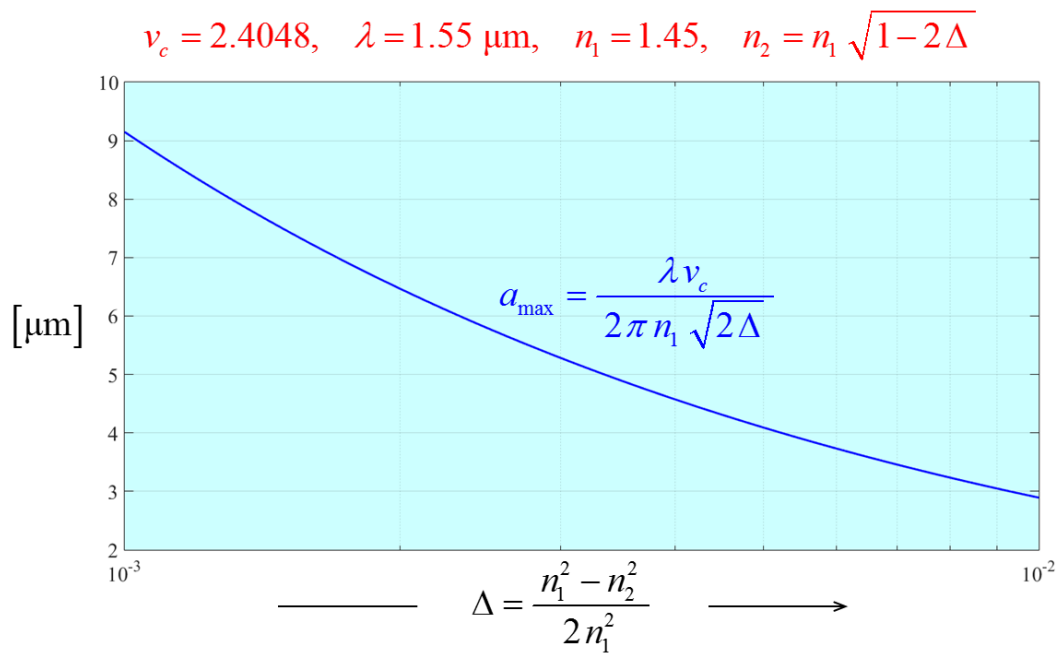


Figura 5

Notando que existe um comprimento de onda de crítico (ou de corte) λ_c , tal que

$$v_c = 2\pi \frac{a}{\lambda_c} n_1 \sqrt{2\Delta} = 2.4048,$$

em que a operação da fibra é monomodal desde que $\lambda > \lambda_c$ (ou, desde que $f < f_c$, com $f = c/\lambda$ e $f_c = c/\lambda_c$), infere-se que

$$\Delta = \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda_c v_c}{2\pi a n_1} \right)^2.$$

A Fig. 6 mostra graficamente a variação do contraste Δ com o raio a do núcleo para diferentes valores do comprimento de onda crítico e considerando sempre $n_1 = 1.50$.

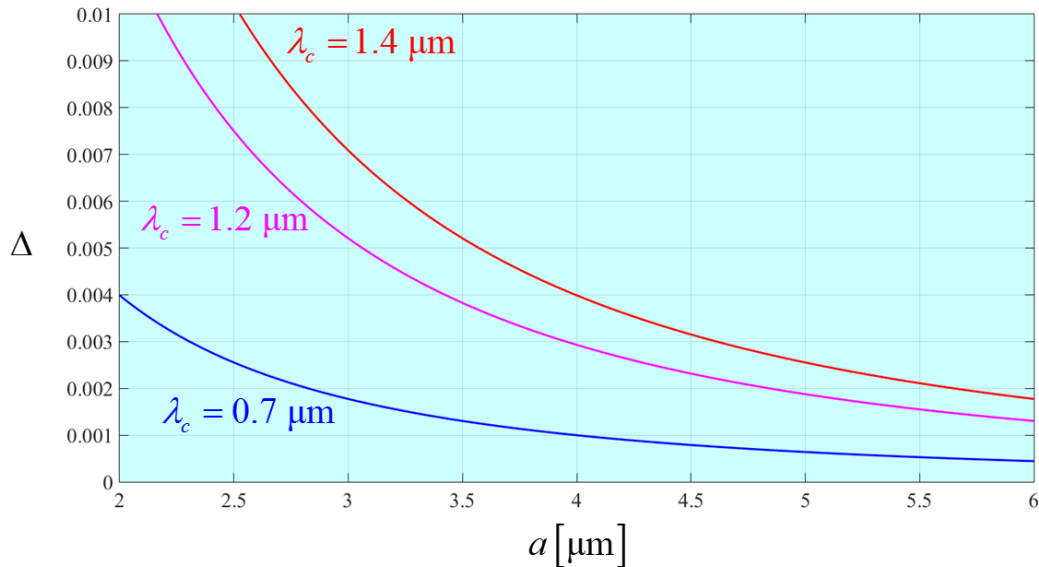


Figura 6

A mecânica quântica – e, em especial, a electrodinâmica quântica ou QED (do inglês: *quantum electrodynamics*) – veio revelar que, ao contrário do que se admitia na electrodinâmica clássica (fundada nas equações de Maxwell), o campo electromagnético não é uma entidade contínua. Pelo contrário: o campo electromagnético é constituído, basicamente, por uma enorme população de partículas elementares (bosões, i.e., partículas de *spin* inteiro que obedecem à estatística de Bose-Einstein) e que se designam por *fotões*. Tanto quanto a experiência permite (por enquanto) estabelecer, os fotões são partículas de massa própria $m=0$, têm uma energia intrínseca $\mathcal{E}_p = hf = \hbar\omega$ e um momento linear próprio $p = h/\lambda = \hbar k$. Representa-se por ω [$\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$] a frequência angular e por f [Hz] a frequência propriamente dita, com $\omega = 2\pi f$. O número de onda k [$\text{rad} \cdot \text{m}^{-1}$], por sua vez, está relacionado com o comprimento de onda λ [m] através da relação $k = 2\pi/\lambda$. Como é habitual, $h = 6.626070040(71) \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}^{-1}$ representa a constante de Planck enquanto que $\hbar = h/(2\pi)$ representa a constante de Planck reduzida, tendo-se

$\hbar = 1.054571800(13) \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}^{-1}$. A velocidade da luz (no vácuo) tem o valor exacto (por definição): $c = 299792458 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \approx 3 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Para efeitos dos nossos cálculos tomaremos o seguinte valor para a constante de Planck:

$$h = 6.62607 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}^{-1} .$$

O dualismo onda-corpúsculo, associado a todas as partículas elementares, deve-se inicialmente a uma hipótese de Louis de Broglie. No caso dos fotões, como é bem conhecido,

$$k = \omega/c \Leftrightarrow \lambda f = c .$$

Em geral, porém, a energia (total) \mathfrak{E} de uma partícula de massa m é tal que

$$\mathfrak{E}^2 = \mathfrak{E}_0^2 + (cp)^2 ,$$

onde

$$\mathfrak{E}_0 = mc^2$$

é a respectiva energia própria (ou intrínseca) e p o correspondente momento linear. No caso do fotão tem-se

$$p = \frac{\mathfrak{E}_p}{c} = \frac{hf}{c} = \frac{h}{\lambda} .$$

Esta equação estabelece, com clareza, o dualismo fundamental da mecânica quântica: no lado esquerdo da equação temos o momento linear que caracteriza (habitualmente) uma partícula (i.e., um corpúsculo); no lado direito da equação temos o comprimento de onda que caracteriza uma grandeza ondulatória. Este dualismo onda-corpúsculo, porém, não é específico dos fotões: ele constitui, até, uma parte íntima da caracterização universal de qualquer partícula (em mecânica quântica). Em geral obtém-se (para uma qualquer partícula em relatividade restrita)

$$\mathfrak{E}^2 = \mathfrak{E}_0^2 + (cp)^2 \Rightarrow 2\mathfrak{E} \frac{d\mathfrak{E}}{dp} = 2c^2 p \Rightarrow \frac{d\mathfrak{E}}{dp} = \frac{c^2 p}{\mathfrak{E}} .$$

A correspondente velocidade v é, então, dada por

$$\boxed{v = \frac{d\mathcal{E}}{dp}} \Rightarrow \boxed{v = \frac{c^2 p}{\mathcal{E}}}$$

No caso de um fóton é $v = c$, donde se infere, efectivamente, que $p = \mathcal{E}_p / c$ (o que mostra que, de facto, qualquer partícula de massa nula se tem de propagar, necessariamente, à velocidade cósmica limite $v_{\max} = c$). Note-se que é este momento linear que permite explicar, e.g., o efeito fotoeléctrico.

Para lidar com energias muito pequenas – como a energia de um fóton – usa-se o electrão-Volt (eV): a energia cinética adquirida por um electrão quando acelerado por uma tensão de 1 V. Tem-se:

$$\boxed{1 \text{ eV} = 1.602176565(35) \times 10^{-19} \text{ J}}$$

Um fóton com um comprimento de onda $\lambda = 1.55 \mu\text{m}$ tem uma energia intrínseca $\mathcal{E}_p = hc / \lambda = 1.2816 \times 10^{-19} \text{ J} = 0.8 \text{ eV}$. A relação entre a energia e a temperatura absoluta (em graus Kelvin) é dada através da constante de Boltzmann: $k_B = 1.38064852(79) \times 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$. Essa relação escreve-se

$$\boxed{\mathcal{E} = k_B T}$$

em que T é a temperatura absoluta.

O sinal óptico digital emitido pela fonte óptica (usualmente um laser semiconductor) e que se irá propagar ao longo da fibra óptica tem dois formatos de modulação possíveis: (i) NRZ (do inglês: *nonreturn-to-zero*); (ii) RZ (do inglês: *return-to-zero*). No formato RZ cada impulso óptico que representa um *bit* 1 é mais curto do que o *slot* temporal T_b alocado a cada *bit*. No formato NRZ, pelo contrário, a amplitude do *bit* 1 permanece no seu valor *on* ao longo de todo o *time slot* de duração $T_b = 1/B$. Assim, a duração dos impulsos depende da sequência específica de *bits* no caso NRZ – embora, no caso RZ, essa duração seja independente da sequência de *bits*. A Fig. 7 ilustra isto mesmo para a seguinte sequência binária: 011101.

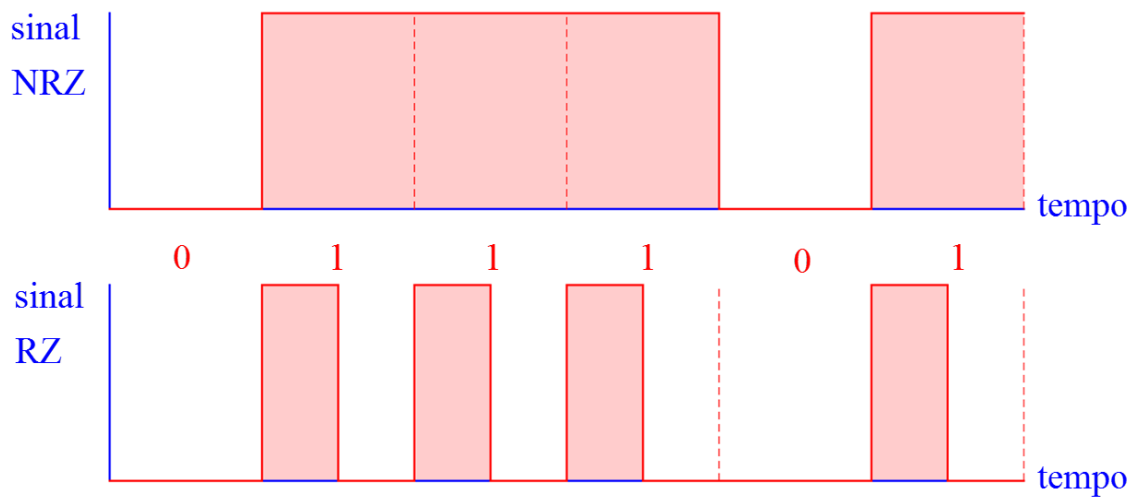


Figura 7

Uma vantagem do formato NRZ é que – dado que o correspondente sinal para uma sequência arbitrária de *bits* comporta, em geral, menos transições *on-off* do que o formato RZ – a largura de banda é comparativamente menor do que no sinal RZ. Contudo, para sistemas de comunicação óptica de alta *performance* (sistemas WDM operando acima de 40 Gb/s), o formato RZ é preferido.

Numa fibra óptica de comprimento L a potência que flui num determinado ponto z , com $0 \leq z \leq L$, é dada por

$$P(z) = P_{\text{in}} \exp(-\alpha z),$$

com $P_{\text{in}} = P(0)$. Ao parâmetro α dá-se o nome de coeficiente de atenuação. No sistema de unidades SI (do francês: *Système Internationale*) $[\alpha] = \text{Np} \cdot \text{m}^{-1}$. Em particular, tem-se

$$P_{\text{out}} = P_{\text{in}} \exp(-\alpha L) \Rightarrow \alpha = \frac{1}{L} \ln \left(\frac{P_{\text{in}}}{P_{\text{out}}} \right).$$

Frequentemente, porém, usam-se unidades logarítmicas – os decibéis ou dB: qualquer quociente R em unidades lineares é convertido para decibéis através da expressão

$$R [\text{dB}] = 10 \log_{10}(R).$$

Assim, e.g., se a atenuação de uma fibra óptica for $\alpha = 0.2 \text{ dB} \cdot \text{km}^{-1}$, isso significa que a potência à saída é

$$\alpha [\text{dB} \cdot \text{km}^{-1}] = \frac{10}{L[\text{km}]} \log_{10}\left(\frac{P_{\text{in}}}{P_{\text{out}}}\right) = 0.2 \quad \therefore \quad P_{\text{out}} = 10^{-0.02L[\text{km}]} P_{\text{in}}.$$

Assim, se a potência (média) recebida pelo fotodetector for $P_{\text{out}} = 0.3 \mu\text{W}$ e a distância $L = 50 \text{ km}$, a atenuação total é de $0.2 \times 50 = 10 \text{ dB}$ e, portanto, $P_{\text{in}} = 3 \mu\text{W}$.

É costume introduzir, também, uma unidade nova de potência designada por dBm:

$$\text{potência} [\text{dBm}] = 10 \log_{10}\left(\frac{\text{potência}}{1 \text{ mW}}\right).$$

Por exemplo: uma potência $P = 50 \text{ dBm}$ corresponde a $P = 10^{-3} \times 10^5 \text{ W} = 100 \text{ W}$; uma potência $P = -30 \text{ dBm}$ corresponde a $P = 10^{-3} \times 10^{-3} \text{ W} = 1 \mu\text{W}$. Admitamos, então, que a potência média recebida no fotodetector é $P_{\text{out}} = -30 \text{ dBm}$ para um débito binário $B = 5 \text{ Gb} \cdot \text{s}^{-1}$. Neste caso, o tempo alocado a cada *bit* é $T_b = B^{-1} = 0.2 \text{ ns}$ e, conseqüentemente, a energia média recebida em cada um desses *time slots* é $\langle \mathfrak{E} \rangle = P_{\text{out}} T_b = 1 \mu\text{W} \times 0.2 \text{ ns} = 2 \times 10^{-16} \text{ J}$. Portanto, se se admitir que os *bits* 1 e 0 são equiprováveis, então

$$P_{\text{out}} = \frac{P_1 + P_0}{2},$$

onde P_1 é a potência média recebida em cada *bit* 1 e P_0 a potência média recebida em cada *bit* 0. Logo, na hipótese simplificativa de se ter $P_0 = 0$, virá $P_1 = 2 P_{\text{out}} = 2 \mu\text{W} = -26.9897 \text{ dBm}$. Suponhamos, além disso, que este mesmo sistema de comunicação óptica é operado no comprimento de onda $\lambda = 1.55 \mu\text{m}$, de modo que um fóton terá a energia intrínseca

$$\lambda = 1.55 \mu\text{m} \quad \mapsto \quad \mathfrak{E}_p = \frac{hc}{\lambda} = 0.8 \text{ eV} = 1.2816 \times 10^{-19} \text{ J}.$$

Num sistema NRZ com impulsos rectangulares, a energia \mathfrak{E}_1 correspondente a cada *bit* 1 será dada, então, por

$$\mathfrak{E}_1 = P_1 T_b = \frac{2P_{\text{out}}}{B} = 2 \mu\text{W} \times 0.2 \text{ ns} = 4 \times 10^{-16} \text{ J}.$$

Conclui-se, daqui, que o número (médio) N_p de fótons necessários, no fotodetector, para produzirem um *bit* 1 é

$$N_p = \frac{\mathfrak{E}_1}{\mathfrak{E}_p} \approx 3120 \text{ fótons}.$$

Note-se, contudo, que o número (médio) $\langle N_p \rangle$ de fótons recebidos por cada *bit* (na hipótese em que se considera $P_0 = 0$) é, no entanto,

$$\langle N_p \rangle = \frac{N_p}{2} = \frac{\mathfrak{E}_1}{2\mathfrak{E}_p} = \frac{\lambda P_{\text{out}}}{hcB}.$$

Assim, no caso em análise, obtém-se

$$\left[\begin{array}{l} \lambda = 1.55 \mu\text{m} \\ B = 5 \text{ Gb} \cdot \text{s}^{-1} \\ P_{\text{out}} = -30 \text{ dBm} = 1 \mu\text{W} \end{array} \right. \mapsto \langle N_p \rangle \approx 1560 \text{ fótons/bit}.$$

Na Fig. 8 representa-se a variação de $\langle N_p \rangle$ com o débito binário B para $\lambda = 1.55 \mu\text{m}$ e diferentes valores da potência (média) recebida pelo fotodetector P_{out} . O chamado limite quântico da fotodeteccção é dado por

$$\langle N_p \rangle = -\frac{1}{2} \ln(2 \times \text{BER}).$$

Para um BER (do inglês: *bit-error rate*) de valor $\text{BER} = 10^{-9}$ (que corresponde a admitir um erro num *bit* por cada 10^9 *bits* recebidos), este limite quântico da fotodeteccção fornece

$$\langle N_p \rangle = 10 \text{ fótons/bit}.$$

É este valor que se encontra indicado a tracejado na Fig. 8.

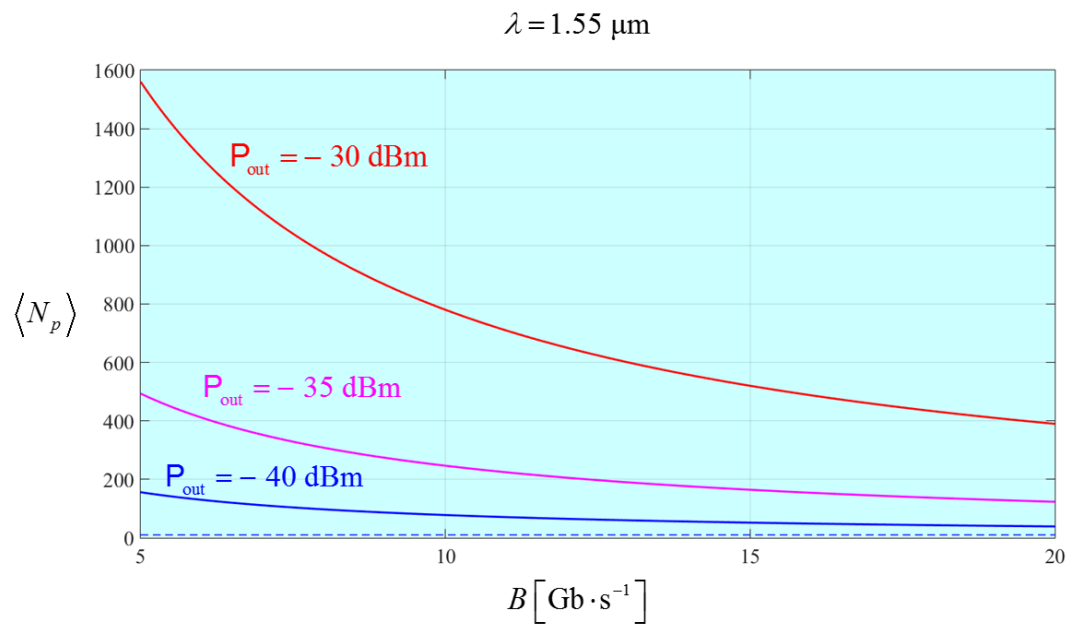


Figura 8

2. Propagação de impulsos

Consideremos uma fibra óptica, de secção circular, com um núcleo cujo índice de refração é n_1 e uma bainha cujo índice de refração é n_2 , com $n_1 > n_2$. Ou seja: a fibra óptica, sob consideração, tem um perfil dielétrico em degrau. Como se viu anteriormente, o contraste dielétrico da fibra é dado pela expressão

$$\Delta = \frac{n_1^2 - n_2^2}{2n_1^2} \quad \mapsto \quad n_2 = n_1 \sqrt{1 - 2\Delta}.$$

Por exemplo: uma fibra óptica convencional, de sílica, tem um diâmetro (típico) de $\Phi = 2a = 9 \mu\text{m}$ com um índice de refração $n_1 = 1.4475$ do núcleo (de raio a) e uma bainha (considerada com um raio infinito) de índice de refração $n_2 = 1.444$ (estes valores indicam, apenas, ordens de grandeza). Neste caso, portanto, obtém-se um contraste dielétrico $\Delta = 0.002415$, i.e. $\Delta = 0.2415 \%$. Quando a frequência da portadora é f a constante de propagação das ondas electromagnéticas (no vácuo) é

$$k_0 = \frac{2\pi f}{c} = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

A velocidade da luz (medida no vácuo) é, por definição, $c = 299\,792\,458 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Assim, no caso particular de se ter $\lambda = 1550 \text{ nm}$ (que corresponde a uma frequência $f = c/\lambda = 193.4145 \text{ THz}$), o chamado parâmetro da fibra (ou frequência normalizada) é, por definição,

$$\text{parâmetro da fibra} \quad \mapsto \quad v = k_0 a \sqrt{n_1^2 - n_2^2} = n_1 k_0 a \sqrt{2\Delta} = \frac{2\pi n_1 a}{\lambda} \sqrt{2\Delta}$$

que, neste caso específico, corresponde ao valor numérico $v = 1.8351$ (regime monomodal já que, portanto, $v < 2.4048$).

A propagação guiada de ondas electromagnéticas através de uma fibra óptica deve-se ao mecanismo físico conhecido por *reflexão interna total* (que ocorre na interface entre o núcleo e a bainha). Nomeadamente, para fibras ópticas operadas no modo fundamental (ver a discussão sobre a análise modal mais à frente), qualquer componente $\Psi(r, \phi, z, t)$ do campo electromagnético da fibra tem a forma

$$T = t - \beta_1 z \quad \mapsto \quad \begin{cases} \Psi(r, \phi, z, t) = F(r, \phi)U(z, t), \\ U(z, t) = A(z, T) \exp[i(\beta_0 z - \omega_0 t)]. \end{cases}$$

Vamos, de seguida, mostrar o porquê desta forma.

Em termos espaciais usam-se *coordenadas cilíndricas* em que cada ponto P (no interior ou no exterior) do núcleo da fibra é caracterizado pelas coordenadas $P \mapsto (r, \theta, z)$. O plano transversal (perpendicular à direcção de propagação) é descrito pelas *coordenadas polares* (r, θ) e a *direcção longitudinal* de propagação é o eixo (positivo) z . Admite-se que a entrada da fibra corresponde ao plano $z=0$. A variação transversal do campo electromagnético é então, caracterizada pela *função modal* $F(r, \theta)$ que, numa secção mais adiante, iremos analisar. Porém, a informação relevante – do ponto de vista da transmissão da informação ao longo da fibra – está contida na função $U(z, t)$.

À entrada da fibra, então, tem-se

$$\boxed{z=0} \rightarrow \boxed{U(0, t) = g(t) \exp(-i\omega_0 t)}.$$

Designou-se, aqui, por $g(t)$ o *sinal modulante* (que, de facto, contém toda a informação a transportar) e por $\omega_0 = 2\pi f$ a frequência (angular) da *portadora*. Assim, coloca-se a seguinte questão (aliás omnipresente em qualquer sistema de telecomunicações): como é que se pode calcular $U(z, t)$ a partir do seu valor, à entrada, $U(0, t)$?

A resposta à pergunta anterior é dada recorrendo à transformada de Fourier.

Seja $G(\omega)$ a transformada de Fourier do sinal modulante $g(t)$, i.e.,

$$G(\omega) = \mathcal{F}[g(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \exp(i\omega t) dt.$$

Tem-se, inversamente,

$$g(t) = \mathcal{F}^{-1}[G(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) \exp(-i\omega t) d\omega.$$

Logo, atendendo a que $U(0, t) = g(t) \exp(-i\omega_0 t)$,

$$\begin{aligned} \tilde{U}(0, \omega) &= \mathcal{F}[U(0, t)] = \int_{-\infty}^{\infty} U(0, t) \exp(i\omega t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \exp[i(\omega - \omega_0)t] dt \\ &\therefore \boxed{\tilde{U}(0, \omega) = G(\omega - \omega_0)}. \end{aligned}$$

Mas, por outro lado, em qualquer ponto $z \geq 0$ da fibra, obtém-se

$$\boxed{\begin{aligned} \tilde{U}(z, \omega) &= \mathcal{H}(z, \omega) \tilde{U}(0, \omega), \\ \mathcal{H}(z, \omega) &= \exp[i\beta(\omega)z]. \end{aligned}}$$

Está-se, aqui, a afirmar o seguinte: a fibra óptica está a ser operada no regime linear monomodal e o seu comportamento é, basicamente, caracterizado pela *função de transferência* $\mathcal{H}(z, \omega)$ expressa

no domínio da frequência e onde se considera uma propagação entre a entrada, em $z=0$, e o ponto de coordenada longitudinal $z>0$. Note-se, ainda, que $\beta = \beta(\omega)$ representa a *constante de propagação longitudinal* (mais adiante iremos ver como se pode calcular esta «constante») do modo fundamental. Logo, vem

$$U(z, t) = \mathcal{F}^{-1} [\tilde{U}(z, \omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{U}(z, \omega) \exp(-i\omega t) d\omega.$$

Daqui resulta, portanto, que

$$\left| \begin{aligned} U(z, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{H}(z, \omega) \tilde{U}(0, \omega) \exp(-i\omega t) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{H}(z, \omega) G(\omega - \omega_0) \exp(-i\omega t) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega - \omega_0) \exp\{i[\beta(\omega)z - \omega t]\} d\omega. \end{aligned} \right.$$

Para calcular o integral indicado há que fazer, em primeiro lugar, a seguinte mudança de variável: seja

$$\boxed{\Omega = \omega - \omega_0} \quad \mapsto \quad \boxed{\beta(\omega) = \beta(\omega_0 + \Omega)}.$$

Nestas condições, é possível considerar o desenvolvimento em série (em torno da portadora ω_0)

$$\beta(\omega) = \beta(\omega_0 + \Omega) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\beta_m}{m!} \Omega^m, \quad \beta_m = \left. \frac{d^m \beta}{d\omega^m} \right|_{\omega=\omega_0}.$$

Quando o desvio de frequência Ω é muito pequeno (i.e., mais precisamente, quando $\Omega \ll \omega_0$) ou quando $\beta_m \approx 0$ para $m \geq 4$, é razoável (i.e., o erro cometido é desprezável) considerar apenas $0 \leq m \leq 3$ no desenvolvimento em série. Nesse caso, vem simplesmente

$$\beta(\omega) = \beta(\omega_0 + \Omega) \approx \beta_0 + \beta_1 \Omega + \frac{1}{2} \beta_2 \Omega^2 + \frac{1}{6} \beta_3 \Omega^3.$$

Note-se que

$$\beta_0 = \beta(\omega_0), \quad \beta_1 = \beta'(\omega_0) = \left. \frac{d\beta}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_0}, \quad \beta_2 = \beta''(\omega_0) = \left. \frac{d^2\beta}{d\omega^2} \right|_{\omega=\omega_0}.$$

Mas então, nestas circunstâncias, é possível concluir que

$$U(z, t) \approx \exp[i(\beta_0 z - \omega_0 t)] \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\Omega) \exp[-i\Omega(t - \beta_1 z)] \exp\left(i\frac{1}{2}\beta_2 \Omega^2\right) \exp\left(i\frac{1}{6}\beta_3 \Omega^3\right) d\Omega,$$

donde, efectivamente,

$$\boxed{T = t - \beta_1 z} \mapsto \begin{cases} \Psi(r, \theta, z, t) = F(r, \theta)U(z, t), \\ U(z, t) = A(z, T) \exp[i(\beta_0 z - \omega_0 t)]. \end{cases}$$

Assim tem-se, com razoável aproximação,

$$A(z, t - \beta_1 z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\Omega) \exp[-i\Omega(t - \beta_1 z)] \exp\left(i\frac{1}{2}\beta_2 \Omega^2 z\right) \exp\left(i\frac{1}{6}\beta_3 \Omega^3 z\right) d\Omega.$$

Quando, nesta última expressão, se faz

$$\boxed{T = t - \beta_1 z}$$

e $\beta_3 \approx 0$, tira-se que

$$A(z, T) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\Omega) \exp(-i\Omega T) \exp\left(i\frac{1}{2}\beta_2 \Omega^2 z\right) d\Omega.$$

Em conclusão: quando se podem desprezar os termos do desenvolvimento em série com $m \geq 3$, é possível escrever (note-se a diferença entre t e $T = t - \beta_1 z$):

$$\begin{cases} \Psi(r, \phi, z, t) = F(r, \theta)U(z, t), \\ U(z, t) = A(z, T) \exp[i(\beta_0 z - \omega_0 t)], \end{cases}$$

↓

$$\begin{aligned} U(0, t) &= g(t) \exp(-i\omega_0 t), \\ A(0, T) &\equiv g(t), \\ \tilde{A}(0, \Omega) &= \mathcal{F}[A(0, T)] = G(\Omega) = \mathcal{F}[g(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \exp(i\Omega t) dt, \\ \tilde{A}(z, \Omega) &= \tilde{A}(0, \Omega) \exp\left(i\frac{1}{2}\beta_2 \Omega^2 z\right), \\ A(z, T) &= \mathcal{F}^{-1}[\tilde{A}(z, \Omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{A}(z, \Omega) \exp(-i\Omega T) d\Omega. \end{aligned}$$

Começou-se por separar a variação *transversal* do campo (independente do tempo), expressa através de $F(r, \theta)$, da variação *longitudinal*, expressa através de $U(z, t)$. Mais adiante, quando se fizer uma análise modal, estudaremos a forma de $F(r, \theta)$. Por enquanto a nossa atenção centra-se sobre a forma de $U(z, t)$. O principal resultado consistiu na decomposição de $U(z, t)$ em duas partes:

$$\mathbf{impulso} \mapsto \boxed{U(z, t) = A(z, T) \exp[i(\beta_0 z - \omega_0 t)]}.$$

A saber:

- Uma parte de variação rápida, o termo $\exp[i(\beta_0 z - \omega_0 t)]$, que diz respeito à portadora, com uma frequência (angular) ω_0 e uma contante de propagação longitudinal $\beta_0 = \beta(\omega_0)$;
- Uma parte de variação lenta, o termo $A(z, T)$ com $T = t - \beta_1 z$, que é a informação que modula a portadora e cuja propagação ao longo da fibra óptica é determinada pelo coeficiente $\beta_2 = \beta''(\omega_0)$.

Diz-se, efectivamente, que $U(z, t)$ é o nosso *impulso* transportado ao longo da fibra pela portadora e que $A(z, T)$ é a *envolvente do impulso*, i.e., a informação propriamente dita. Considere-se, então, uma ligação por fibra óptica de comprimento $z = L$. Assim:

- À entrada $z = 0$ da fibra o impulso $U(z, t)$ tem a forma $U(0, t) = g(t) \exp(-i\omega_0 t)$, pelo que a envolvente é dada por $A(0, T) \equiv g(t)$;
- À saída $z = L$ da fibra o impulso $U(z, t)$ tem uma nova forma $U(L, t)$ a que corresponde uma nova envolvente $A(L, T_g)$, em que $U(L, t) = A(L, T_g) \exp[i(\beta_0 L - \omega_0 t)]$. Porém, como se irá ver, a envolvente – devido ao efeito do coeficiente $\beta_2 = \beta''(\omega_0)$ – não é, no caso geral, uma translação (no tempo) de $A(0, T) \equiv g(t)$. De facto, verifica-se que $A(L, T_g) \neq g(t - \tau_g)$, com $T_g = t - \tau_g$ e onde $\tau_g = \beta_1 L$ indica, apenas, o atraso sofrido pelo impulso e que se costuma designar por *atraso de grupo*.

Vejamos porquê.

Para efeitos da nossa discussão admitamos que se tem $\beta_2 = \beta''(\omega_0) = 0$. Nestas condições especiais vem então, sucessivamente,

$$\boxed{\begin{matrix} \beta_2 = 0 \\ \tau_g = \beta_1 L \\ T_g = t - \tau_g \end{matrix}} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \tilde{A}(L, \Omega) = \tilde{A}(0, \Omega) \exp\left(i \frac{1}{2} \beta_2 \Omega^2 L\right) = \tilde{A}(0, \Omega) = G(\Omega), \\ A(L, T_g) = \mathcal{F}^{-1}[\tilde{A}(L, \Omega)] \\ = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{A}(L, \Omega) \exp(-i\Omega T_g) d\Omega \\ = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\Omega) \exp(-i\Omega T_g) d\Omega \\ = g(t - \tau_g). \end{array} \right.$$

Ou seja: apenas quando se considera $\beta_2 = \beta''(\omega_0) = 0$ é que se tem $A(L, T_g) = g(t - \tau_g)$. No caso geral, quando $\beta_2 = \beta''(\omega_0) \neq 0$, obtém-se $A(L, T_g) \neq g(t - \tau_g)$. Usando uma linguagem mais simples: só quando é possível desprezar o coeficiente $\beta_2 = \beta''(\omega_0)$ é que o impulso, à saída, é uma réplica sem distorção do impulso à entrada.

Mas, na maioria das situações práticas, nunca é possível considerar $\beta_2 = \beta''(\omega_0) = 0$. Por essa razão, a fibra irá sempre introduzir alguma distorção sobre o sinal modulante $g(t)$ que foi introduzido à entrada da fibra.

Antes de terminar esta secção convém introduzir mais alguma nomenclatura apropriada. Como $\tau_g = \beta_1 L$ representa o atraso de grupo, infere-se que $1/\beta_1 = L/\tau_g$ tem as dimensões de uma velocidade. Esta velocidade designa-se por *velocidade de grupo da portadora* e representa-se por $v_g(\omega_0)$. Portanto,

$$v_g(\omega_0) = \frac{L}{\tau_g} = \frac{1}{\beta_1} = \frac{1}{\beta'(\omega_0)}.$$

Note-se que, deste modo,

$$T = t - \beta_1 z = t - \frac{z}{v_g(\omega_0)} = t - \frac{z}{L} \frac{L}{v_g(\omega_0)} = t - \left(\frac{z}{L}\right) \tau_g,$$

tendo-se, naturalmente, $T = t$ para $z = 0$ e $T = t - \tau_g$ para $z = L$.

Mais geralmente define-se a velocidade de grupo para qualquer frequência ω :

$$\text{velocidade de grupo} \quad \mapsto \quad \boxed{v_g(\omega) = \frac{1}{\beta'(\omega)} = \frac{1}{\frac{d\beta}{d\omega}}}.$$

Frequentemente comete-se o seguinte abuso de linguagem/notação: apesar de β_1 , β_2 e τ_g terem sido introduzidos *apenas* para a frequência $\omega = \omega_0$ da portadora (mais precisamente, no desenvolvimento em série em torno da portadora), continua-se a usar a mesma notação para frequências $\omega \neq \omega_0$. Assim, faz-se $\beta_1 = \beta'(\omega)$, $\beta_2 = \beta''(\omega)$ e $\tau_g(\omega) = L/v_g(\omega)$. Com este abuso de notação, escreve-se

$$\beta_2(\omega) \equiv \beta''(\omega) = \frac{d^2\beta}{d\omega^2} = \frac{d\beta'}{d\omega} \equiv \frac{d\beta_1}{d\omega} = \frac{d}{d\omega} \left[\frac{1}{v_g(\omega)} \right] = \frac{1}{L} \frac{d\tau_g}{d\omega}$$

e designa-se esta função por *dispersão da velocidade de grupo*. Assim,

$$\text{dispersão da velocidade de grupo} \quad \mapsto \quad \boxed{\beta_2(\omega) = \frac{d}{d\omega} \left[\frac{1}{v_g(\omega)} \right] = -\frac{1}{v_g^2(\omega)} \frac{dv_g}{d\omega}}.$$

Ou seja: só quando a velocidade de grupo não varia com a frequência (i.e., $dv_g/d\omega = 0$) é que a dispersão da velocidade de grupo se anula. Quando $dv_g/d\omega < 0$ é $\beta_2(\omega) > 0$ e diz-se que a fibra se encontra a operar na *zona de dispersão normal* pois a velocidade de grupo é maior para as componentes espectrais do impulso com frequência mais baixa (ou comprimento de onda mais alto),

i.e., observa-se um *desvio para o vermelho* na *frente* do impulso e um *desvio para o azul* na sua *cauda*. Quando $dv_g/d\omega > 0$ é $\beta_2(\omega) < 0$ e diz-se que a fibra se encontra a operar na *zona de dispersão anómala* pois a velocidade de grupo é maior para as componentes espectrais do impulso com frequência mais alta (ou comprimento de onda mais baixo), i.e., observa-se um *desvio para o azul* na *frente* do impulso e um *desvio para o vermelho* na sua *cauda*.

Por vezes, em vez do coeficiente β_2 da DVG (dispersão da velocidade de grupo), utiliza-se o *coeficiente de dispersão* D , tal que

$$\text{coeficiente de dispersão} \mapsto D(\lambda) = \frac{d}{d\lambda} \left[\frac{1}{v_g(\lambda)} \right] = \frac{1}{L} \frac{d\tau_g}{d\lambda}.$$

Desta definição decorre que, para uma largura espectral $\Delta\lambda$ da fonte óptica (e.g., um laser semiconductor monomodal), se obtém – como *estimativa grosseira* – um alargamento $\Delta\tau$ do impulso ao fim de um troço de fibra de comprimento L dado por

$$\Delta\tau \sim |D| L \Delta\lambda.$$

Por exemplo: para $D = 16 \text{ ps}/(\text{km} \cdot \text{nm})$, $L = 1.5 \text{ km}$ e $\Delta\lambda = 2 \text{ nm}$, obtém-se uma estimativa de alargamento $\Delta\tau \sim 48 \text{ ps}$. Mais adiante vai-se indicar um processo mais fiável para calcular o alargamento dos impulsos provocado pela dispersão.

Como λ é o comprimento de onda medido no vácuo, tem-se $\lambda f = c$. Logo,

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi c}{\lambda} \Rightarrow \frac{d\omega}{d\lambda} = -\frac{2\pi c}{\lambda^2} \Rightarrow \frac{d\tau_g}{d\lambda} = \frac{d\tau_g}{d\omega} \frac{d\omega}{d\lambda} = -\frac{2\pi c}{\lambda^2} \frac{d\tau_g}{d\omega},$$

pelo que

$$D = -\frac{2\pi c}{\lambda^2} \beta_2.$$

Uma fibra óptica convencional, operada em $\lambda = 1.55 \mu\text{m}$, tem (tipicamente) uma dispersão da velocidade de grupo $\beta_2 = -20 \text{ ps}^2/\text{km}$. Assim, nesse mesmo comprimento de onda, o coeficiente de dispersão é de

$$\begin{aligned} D &= \frac{2\pi \times 299792458}{(1.55 \times 10^{-6})^2} \times (20 \times 10^{-27}) \text{ s} \cdot \text{m}^{-2} \\ &= 15.6808 \times 10^{-6} \text{ s} \cdot \text{m}^{-2} \\ &= 15.6808 \text{ ps}/(\text{km} \cdot \text{nm}) \end{aligned} \quad \mapsto \quad \boxed{D \approx 16 \text{ ps}/(\text{km} \cdot \text{nm})}.$$

3. Impulsos gaussianos com trinado

Vamos ilustrar a metodologia geral exposta na secção anterior com um exemplo – a propagação de impulsos gaussianos com trinado.

Quando é possível desprezar o coeficiente de dispersão de ordem superior (i.e., quando $\beta_3 = 0$), viuse na secção anterior que

$$\boxed{T = t - \beta_1 z} \mapsto \begin{cases} U(0, t) = A(0, T) \exp(-i \omega_0 t), & z = 0, \\ U(z, t) = A(z, T) \exp[i(\beta_0 z - \omega_0 t)], & z \geq 0, \end{cases}$$

com

$$\boxed{\Omega = \omega - \omega_0} \mapsto \begin{cases} \tilde{A}(0, \Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} A(0, T) \exp(i \Omega T) dT, \\ \tilde{A}(z, \Omega) = \tilde{A}(0, \Omega) \exp\left(i \frac{1}{2} \beta_2 \Omega^2 z\right), \\ A(z, T) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{A}(z, \Omega) \exp(-i \Omega T) d\Omega. \end{cases}$$

Para um impulso gaussiano, tem-se (para $z = 0$ é $T = t$)

$$\begin{array}{l} \text{impulso gaussiano} \\ \text{com trinado} \end{array} \mapsto \boxed{A(0, T) = A_0 \exp\left[-\frac{1+iC}{2} \left(\frac{T}{T_0}\right)^2\right]},$$

com $A_0 > 0$. Nesta expressão aparece o parâmetro de trinado (em inglês: *chirp*) C que tanto pode ser positivo como negativo. Começemos por notar que

$$\Phi(T) = \frac{1}{2} C \left(\frac{T}{T_0}\right)^2 \mapsto A(0, T) = A_0 \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{T}{T_0}\right)^2\right] \exp[-i \Phi(T)]$$

$$\therefore \text{trinado} \mapsto \boxed{C = T_0^2 \left(\frac{1}{T} \frac{d\Phi}{dT} \right)}.$$

Ou seja: num impulso em que existe uma fase Φ quadrática no tempo, o trinado é o parâmetro que regula o declive do *desvio dinâmico de frequência* $\delta\omega$ em relação à portadora e que é – nesse caso – linear em T . Com efeito,

$$\delta\omega = \frac{d\Phi}{dT} = \left(\frac{C}{T_0} \right) \left(\frac{T}{T_0} \right).$$

Começemos, então, por calcular

$$\tilde{A}(0, \Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} A(0, T) \exp(i \Omega T) dT = A_0 \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-\frac{1+iC}{2} \left(\frac{T}{T_0} \right)^2 \right] \exp(i \Omega T) dT.$$

Se se tiver em consideração que, desde que $\Re(a) > 0$, se tem

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \exp[-(ax^2 + bx)] dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(\frac{b^2}{4a}\right)},$$

basta fazer a identificação

$$a = \frac{1+iC}{2T_0^2}, \quad b = -i\Omega,$$

para se obter

$$\boxed{\tilde{A}(0, \Omega) = A_0 \sqrt{\frac{2\pi T_0^2}{1+iC}} \exp \left[-\frac{\Omega^2 T_0^2}{2(1+iC)} \right]},$$

a que corresponde a intensidade espectral

$$|\tilde{A}(0, \Omega)|^2 = \tilde{A}(0, \Omega) \tilde{A}^*(0, \Omega) = A_0^2 \frac{2\pi T_0^2}{\sqrt{1+C^2}} \exp \left(-\frac{\Omega^2 T_0^2}{1+C^2} \right).$$

Portanto, a meia-largura da intensidade espectral para $1/e$ da intensidade máxima é

$$\boxed{\Delta\omega = \frac{\sqrt{1+C^2}}{T_0}}.$$

Esta última expressão revela o efeito do trinado sobre a largura espectral: a existência de trinado produz um alargamento do espectro do impulso pois, na sua ausência, ter-se-ia apenas $T_0 \Delta\omega = 1$.

Para calcular

$$\begin{aligned} A(z, T) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{A}(z, \Omega) \exp(-i \Omega T) d\Omega \\ &= \frac{A_0 T_0}{\sqrt{2\pi(1+iC)}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\left[\frac{T_0^2}{2(1+iC)} - i\frac{1}{2}\beta_2 z\right]\Omega^2\right\} \exp(-i \Omega T) d\Omega \end{aligned}$$

podemos utilizar, aqui, o mesmo integral já usado atrás, fazendo agora

$$a = \frac{T_0^2 Q(z)}{2(1+iC)}, \quad b = iT,$$

e onde se introduziu a função

$$Q(z) = 1 + (C - i) \frac{\beta_2 z}{T_0^2}.$$

O resultado pode ser escrito na forma

$$A(z, T) = \frac{A_0}{\sqrt{Q(z)}} \exp\left[-\frac{1+iC}{2Q(z)} \left(\frac{T}{T_0}\right)^2\right].$$

Definindo, então,

$$\eta(z) = |Q(z)| = \sqrt{\left(1 + C \frac{\beta_2 z}{T_0^2}\right)^2 + \left(\frac{\beta_2 z}{T_0^2}\right)^2},$$

obtem-se

$$Q(z) = \eta(z) \exp[-i\delta(z)], \quad \tan[\delta(z)] = \frac{\beta_2 z}{T_0^2 + C\beta_2 z}.$$

Daqui infere-se que ainda se pode escrever

$$A(z, T) = \frac{A_0}{\sqrt{\eta(z)}} \exp\left\{-\frac{1+iC_1(z)}{2} \left[\frac{T}{T_1(z)}\right]^2\right\} \exp\left[i\frac{1}{2}\delta(z)\right],$$

em que

$$T_1(z) = T_0 \eta(z) = T_0 \sqrt{\left(1 + C \frac{\beta_2 z}{T_0^2}\right)^2 + \left(\frac{\beta_2 z}{T_0^2}\right)^2}$$

e onde

$$C_1(z) = C + (1 + C^2) \frac{\beta_2 z}{T_0^2}.$$

Assim, a *largura do impulso* – em qualquer ponto ao longo da fibra – é $T_1(z)$, sendo T_0 a sua largura inicial. Deste modo, $\eta(z)$ é o *coeficiente de alargamento dos impulsos*. Portanto, se se definir o *comprimento de dispersão* L_D , tal que

$$\text{comprimento de dispersão} \mapsto \boxed{L_D = \frac{T_0^2}{|\beta_2|}},$$

podemos introduzir uma *distância normalizada* (adimensional) ζ ao longo da fibra, tal que

$$\text{distância normalizada} \mapsto \boxed{\zeta = \frac{z}{L_D}}.$$

É então possível reescrever a forma do impulso gaussiano com trinado em cada ponto da fibra na forma

$$\boxed{\begin{aligned} \eta(\zeta) &= \sqrt{\left[1 + \text{sgn}(\beta_2) C \zeta\right]^2 + \zeta^2} \\ T_1(\zeta) &= T_0 \eta(\zeta) \\ C_1(\zeta) &= C + \text{sgn}(\beta_2) (1 + C^2) \zeta \\ \delta(\zeta) &= \frac{\zeta}{\text{sgn}(\beta_2) + C \zeta} \end{aligned}}$$

$$\therefore \boxed{A(\zeta, T) = \frac{A_0}{\sqrt{\eta(\zeta)}} \exp\left\{-\frac{1 + i C_1(\zeta)}{2} \left[\frac{T}{T_1(\zeta)}\right]^2\right\} \exp\left[i \frac{1}{2} \delta(\zeta)\right]}.$$

Tem-se

$$\beta_2 = \text{sgn}(\beta_2) |\beta_2| \mapsto |\beta_2| = \text{sgn}(\beta_2) \beta_2.$$

Quando a dispersão diminui, o comprimento de dispersão aumenta e o valor de ζ diminui, assim provocando uma diminuição do alargamento do impulso. De facto, como é óbvio, tem-se

$$\beta_2 \rightarrow 0 \Rightarrow L_D \rightarrow \infty \Rightarrow \zeta \rightarrow 0 \Rightarrow \eta \rightarrow 1.$$

Deve referir-se que o impulso permanece, ao longo da sua transmissão na fibra, um impulso gaussiano com um trinado total $C_1(\zeta)$ que é a soma do trinado inicial C com o trinado autoinduzido $C_s(\zeta)$:

$$\begin{aligned} C_1(\zeta) &= C + C_s(\zeta), \\ C_s(\zeta) &= \text{sgn}(\beta_2)(1 + C^2)\zeta. \end{aligned}$$

O trinado autoinduzido é proporcional à distância percorrida na fibra. Atendendo a que

$$\eta^2(\zeta) = 1 + 2 \text{sgn}(\beta_2) C \zeta + (1 + C^2) \zeta^2,$$

tira-se que

$$2\eta(\zeta) \frac{d\eta}{d\zeta} = 2 \text{sgn}(\beta_2) C + 2(1 + C^2)\zeta.$$

Logo, a largura pode efectivamente diminuir: o seu valor mínimo ocorre para

$$\zeta_0 = -\frac{\text{sgn}(\beta_2) C}{1 + C^2},$$

que se localiza sobre a fibra desde que $\zeta_0 > 0$, i.e., se

$$\text{sgn}(\beta_2) C < 0 \Leftrightarrow \beta_2 C < 0.$$

Neste caso a largura mínima do impulso é dada por

$$\eta_{\min} = \frac{T_1^{\min}}{T_0} = \eta(\zeta_0) = \sqrt{[1 + \text{sgn}(\beta_2) C \zeta_0]^2 + \zeta_0^2} = \frac{1}{\sqrt{1 + C^2}}$$

$$\therefore \boxed{T_1^{\min} = \frac{T_0}{\sqrt{1 + C^2}}}.$$

Note-se que, por outro lado, o trinado total se anula (também) para $\zeta = \zeta_0$, pois $C_s(\zeta) = -C$ quando

$$\operatorname{sgn}(\beta_2)(1+C^2)\zeta = -C \Rightarrow \zeta = -\frac{\operatorname{sgn}(\beta_2)C}{1+C^2} = \zeta_0.$$

Além disso, a largura do impulso é $\eta(\zeta)=1$ quando

$$\eta^2(\zeta) = 1 + 2 \operatorname{sgn}(\beta_2) C \zeta + (1+C^2)\zeta^2 = 1 \Rightarrow \zeta [2 \operatorname{sgn}(\beta_2) C + (1+C^2)\zeta] = 0.$$

Existem duas soluções possíveis para a última equação: a solução trivial, correspondente a $\zeta = 0$, e uma solução extraordinária, correspondente a $\zeta = 2 \zeta_0$. Ou seja: quando $\beta_2 C < 0$ existe uma fase inicial da propagação do impulso em se verifica uma compressão (i.e., uma diminuição da sua largura), atingindo-se o mínimo para $\zeta = \zeta_0$, recuperando o impulso a sua largura inicial para $\zeta = 2 \zeta_0$. Nesta distância (normalizada) é

$$C_s(2\zeta_0) = 2 \operatorname{sgn}(\beta_2)(1+C^2)\zeta_0 = -2C \mapsto C_1(2\zeta_0) = -C.$$

Ou seja: no caso em que $\beta_2 C < 0$ o impulso gaussiano retoma a sua largura inicial quando o seu trinado total for simétrico do seu trinado inicial.

Agora, de

$$A(\zeta, T) = \frac{A_0}{\sqrt{\eta(\zeta)}} \exp\left\{-\frac{1+iC_1(\zeta)}{2} \left[\frac{T}{T_1(\zeta)}\right]^2\right\} \exp\left[i\frac{1}{2}\delta(\zeta)\right],$$

resulta imediatamente

$$|A(\zeta, T)|^2 = A(\zeta, T) A^*(\zeta, T) = \frac{A_0^2}{\eta(\zeta)} \exp\left\{-\frac{1+iC_1(\zeta)}{2} \left[\frac{T}{T_1(\zeta)}\right]^2 - \frac{1-iC_1(\zeta)}{2} \left[\frac{T}{T_1(\zeta)}\right]^2\right\}$$

$$\therefore \boxed{|A(\zeta, T)|^2 = \frac{A_0^2}{\eta(\zeta)} \exp\left\{-\left[\frac{T}{T_1(\zeta)}\right]^2\right\}}.$$

À medida que o impulso se propaga a sua largura aumenta e, dada a conservação da energia (estamos a desprezar as perdas), a sua área mantém-se constante – daí que a sua amplitude vá decrescendo. Ou seja,

$$\mathfrak{E} = \int_{-\infty}^{\infty} |A(\zeta, T)|^2 dT = \int_{-\infty}^{\infty} |A(0, T)|^2 dT = A_0^2 \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\left(\frac{T}{T_0}\right)^2\right] dT.$$

Logo, usando – mais uma vez – o nosso integral, fazendo agora

$$a = \frac{1}{T_0^2}, \quad b = 0,$$

obtem-se

$$\boxed{\mathfrak{E} = \sqrt{\pi} A_0^2 T_0}.$$

Portanto, como também

$$\mathfrak{E} = \int_{-\infty}^{\infty} |A(\zeta, T)|^2 dT = \frac{A_0^2}{\eta(\zeta)} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\left[\frac{T}{T_1(\zeta)}\right]^2\right\} dT,$$

vem, com

$$a = \frac{1}{T_1^2(\zeta)}, \quad b = 0,$$

$$\mathfrak{E} = \sqrt{\pi} \frac{A_0^2}{\eta(\zeta)} T_1(\zeta) = \sqrt{\pi} A_0^2 T_0 \Rightarrow \boxed{\frac{T_1(\zeta)}{\eta(\zeta)} = T_0},$$

recuperando-se, por um processo alternativo, a forma do alargamento dos impulsos. Na Fig. 9 apresenta-se a variação de $|A(\zeta, T)|^2/A_0^2$ em função de T/T_0 para $z=0$ (i.e., à entrada da fibra) e para $\zeta=2$. O caso $\zeta=2$, que corresponde a $L=2L_D$, é representado na zona de dispersão anômala (em que $\beta_2 < 0$) e para os três casos seguintes: (i) $C=0$; (ii) $C=1/2$; (iii) $C=-1/2$. Na Fig. 10a apresenta-se a variação do coeficiente η de alargamento dos impulsos em função da distância normalizada $\zeta = z/L_D$, para diferentes valores do parâmetro de trinado C . Na Fig. 10b, por sua vez, apresenta-se a variação do trinado total C_1 em função de $\zeta = z/L_D$, também para diferentes valores do trinado inicial C .

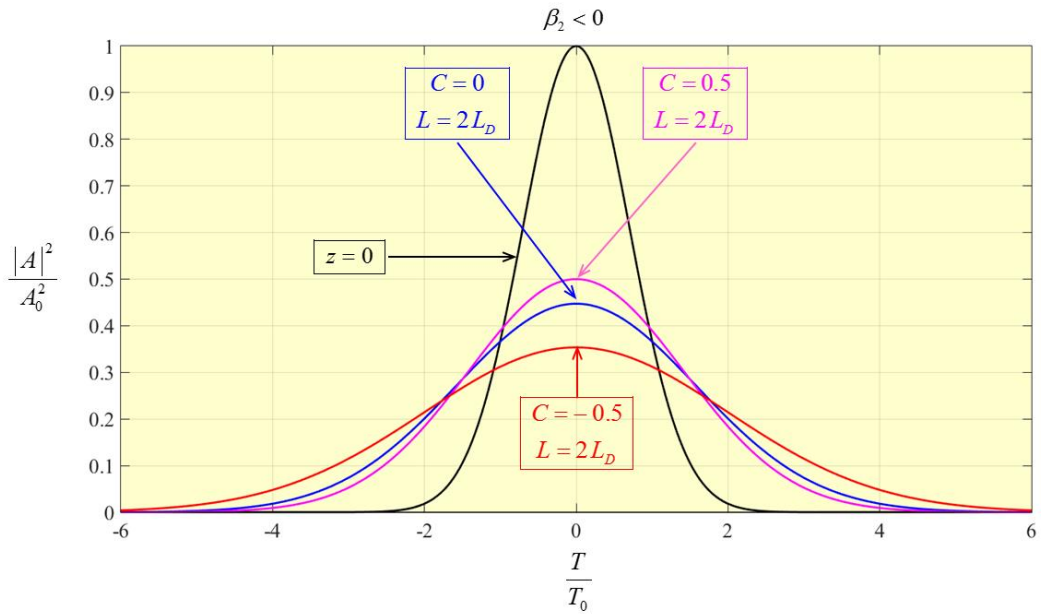


Figura 9

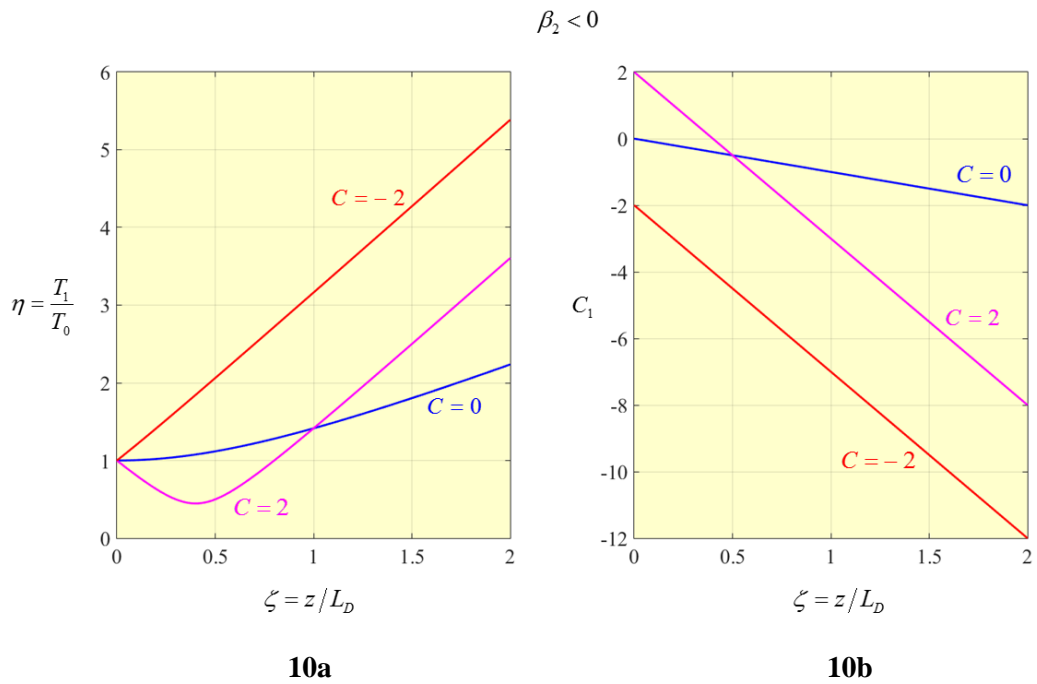


Figura 10

Vamos, agora, determinar a *largura efectiva* σ do impulso (ou largura RMS = *root mean square*). Por definição,

$$\langle T^m \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} T^m |A(\zeta, T)|^2 dT}{\int_{-\infty}^{\infty} |A(\zeta, T)|^2 dT} = \frac{1}{\mathfrak{E}} \int_{-\infty}^{\infty} T^m |A(\zeta, T)|^2 dT .$$

Então, a largura efectiva σ é tal que

$$\sigma^2 = \langle T^2 \rangle - \langle T \rangle^2 .$$

No caso do impulso gaussiano tem-se, como se viu anteriormente, $\mathfrak{E} = \sqrt{\pi} A_0^2 T_0$. Por outro lado, como o impulso gaussiano é simétrico, resulta $\langle T \rangle = 0$. Portanto,

$$\sigma^2(\zeta) = \frac{1}{\mathfrak{E}} \int_{-\infty}^{\infty} T^2 |A(\zeta, T)|^2 dT = \frac{A_0^2}{\eta(\zeta) \mathfrak{E}} \int_{-\infty}^{\infty} T^2 \exp\left\{-\left[\frac{T}{T_1(\zeta)}\right]^2\right\} dT .$$

Assim, atendendo a que (desde que $a > 0$)

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \exp(-ax^2) dx = \frac{1}{2a} \sqrt{\frac{\pi}{a}} ,$$

infere-se que

$$\sigma(\zeta) = \frac{T_1(\zeta)}{\sqrt{2}} .$$

Em particular, à entrada da fibra, será

$$\sigma_0 = \sigma(0) = \frac{T_0}{\sqrt{2}} .$$

Ou seja,

$$\left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)^2 = \eta^2(\zeta) = [1 + \operatorname{sgn}(\beta_2) C \zeta]^2 + \zeta^2 = \left(1 + C \frac{\beta_2 L}{2\sigma_0^2}\right)^2 + \left(\frac{\beta_2 L}{2\sigma_0^2}\right)^2 ,$$

para $z = L$.

Para terminar esta secção, vamos calcular o espectro do impulso gaussiano com trinado num ponto qualquer ao longo da sua transmissão na fibra. Vem

$$\begin{aligned} \tilde{A}(\zeta, \Omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} A(\zeta, T) \exp(i \Omega T) dT \\ &= \frac{A_0}{\sqrt{Q(\zeta)}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{1+iC}{2Q(\zeta)} \left(\frac{T}{T_0}\right)^2\right] \exp(i \Omega T) dT, \end{aligned}$$

pelo que, fazendo

$$a = \frac{1+iC}{2Q(\zeta)T_0^2}, \quad b = -i \Omega,$$

se obtém

$$\tilde{A}(\zeta, \Omega) = A_0 \sqrt{\frac{2\pi T_0^2}{1+iC}} \exp\left[-\frac{\Omega^2 T_0^2 Q(\zeta)}{2(1+iC)}\right],$$

com

$$Q(\zeta) = 1 + \text{sgn}(\beta_2)(C-i)\zeta.$$

Em regime linear, sem perdas, a intensidade espectral do impulso não varia ao longo da fibra:

$$|\tilde{A}(\zeta, \Omega)|^2 = |\tilde{A}(0, \Omega)|^2 = A_0^2 \frac{2\pi T_0^2}{\sqrt{1+C^2}} \exp\left(-\frac{\Omega^2 T_0^2}{1+C^2}\right).$$

4. Débito binário

O estudo da propagação de impulsos gaussianos com trinado, feito na secção anterior, tem uma aplicação importante – o cálculo do débito binário numa fibra óptica operada num sistema de comunicação óptica digital. Porém, é necessário – desde já – salientar o seguinte: (i) o estudo baseia-se em impulsos gaussianos; (ii) admite-se que a fibra óptica está a funcionar em regime linear monomodal; (iii) admite-se, ainda, que a fonte óptica tem uma largura de banda negligenciável (e.g., um laser semiconductor monomodal); (iv) apenas se considera o coeficiente β_2 da DVG (dispersão da velocidade de grupo), i.e., admite-se que é possível desprezar o efeito do coeficiente β_3 da dispersão de ordem superior.

Assim, para impulsos gaussianos com trinado, a largura efectiva σ , à saída de uma fibra de comprimento L , relaciona-se com a largura σ_0 , à entrada, através da expressão da secção anterior:

$$\left(\frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^2 = \left(1 + C \frac{\beta_2 L}{2\sigma_0^2} \right)^2 + \left(\frac{\beta_2 L}{2\sigma_0^2} \right)^2.$$

O débito binário B é o inverso do período temporal T_b atribuído a cada *bit* (do inglês: *binary digit*) de informação transmitida, i.e., $B = 1/T_b$. Uma regra prática, que se irá aplicar aqui, é que se deve impor (de forma a ter um BER = *bit error rate* aceitável) o limite

$$\sigma < \frac{T_b}{4} \quad \mapsto \quad B < B_0 = \frac{1}{4\sigma},$$

onde se designou por B_0 o valor máximo admissível do débito binário (em inglês: *bit rate*).

Devemos começar por notar que a expressão indicada para σ revela que a largura efectiva depende da largura σ_0 à entrada. Com efeito, tem-se

$$\sigma^2 = \sigma_0^2 + C \beta_2 L + (1 + C^2) \left(\frac{\beta_2 L}{2\sigma_0} \right)^2.$$

Assim, para calcular o valor de $B_0 = (4\sigma)^{-1}$, há que começar por calcular o valor óptimo de σ_0 que minimiza o valor de σ . Ora, esse valor óptimo deverá corresponder ao anulamento da derivada $d\sigma/d\sigma_0$:

$$\text{valor óptimo de } \sigma_0 \mapsto \boxed{\frac{d\sigma}{d\sigma_0} = 0}.$$

Mas então, vem sucessivamente

$$\sigma^2 = \sigma_0^2 + C\beta_2 L + (1+C^2)\left(\frac{\beta_2 L}{2\sigma_0}\right)^2 \mapsto 2\sigma \frac{d\sigma}{d\sigma_0} = 2\sigma_0 + 2(1+C^2)\left(\frac{\beta_2 L}{2\sigma_0}\right)\left(-\frac{\beta_2 L}{2\sigma_0^2}\right)$$

$$\frac{d\sigma}{d\sigma_0} = 0 \Rightarrow 2\sigma_0 + 2(1+C^2)\left(\frac{\beta_2 L}{2\sigma_0}\right)\left(-\frac{\beta_2 L}{2\sigma_0^2}\right) = 0$$

$$\therefore \text{valor óptimo de } \sigma_0 \mapsto \boxed{\sigma_0 = \sqrt[4]{1+C^2} \sqrt{\frac{|\beta_2|L}{2}}}.$$

Este valor óptimo corresponde, agora, a uma largura efectiva à saída dada por

$$\text{valor mínimo} \mapsto \boxed{\sigma = \sqrt{|\beta_2|L} \sqrt{\text{sgn}(\beta_2)C + \sqrt{1+C^2}}}.$$

Esta é, portanto, a largura mínima que é possível obter à entrada do fotodetector. Na ausência de trinado obtém-se $\sigma_u = \sigma(C=0)$, com

$$\sigma_u = \sqrt{|\beta_2|L}.$$

A Fig. 11 mostra σ/σ_u e σ/σ_u em função do trinado C para a zona de dispersão anómala em que $\beta_2 < 0$. Daqui decorre que o valor máximo do débito binário é, então,

$$B_0 = \frac{1}{4\sigma} = \frac{\mathcal{B}(C)}{4\sqrt{|\beta_2|L}},$$

onde se introduziu a função

$$\mathcal{B}(C) = \frac{1}{\sqrt{\text{sgn}(\beta_2)C + \sqrt{1+C^2}}}.$$

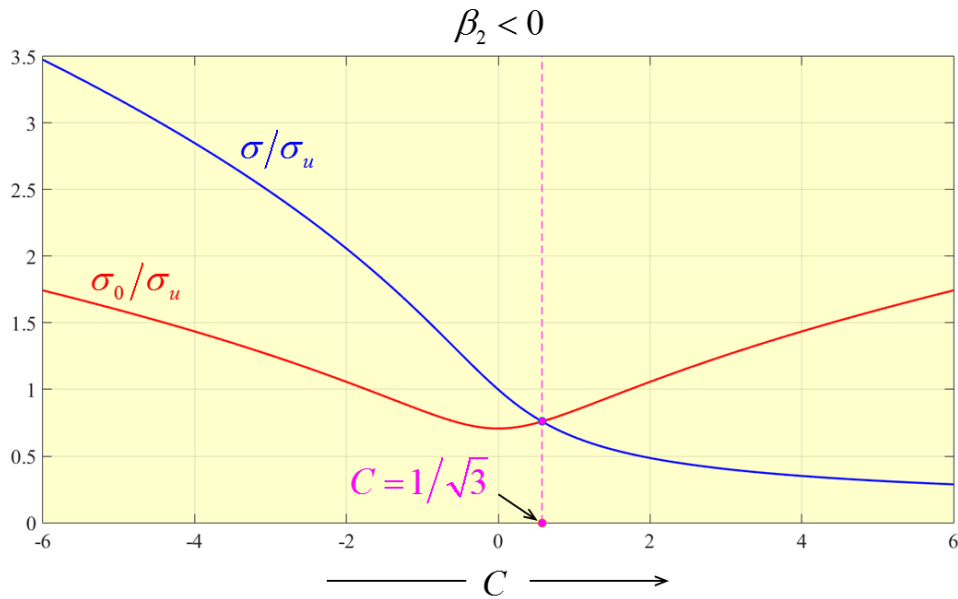


Figura 11

Na Fig. 12 representa-se graficamente $\mathcal{B} = \mathcal{B}(C)$ para a zona de dispersão anómala, em que $\beta_2 < 0$, i.e., onde $\text{sgn}(\beta_2) = -1$. Esta figura mostra que, para $\beta_2 C < 0$, $\mathcal{B}(C)$ cresce ilimitadamente com o trinado: quando $C \rightarrow \infty$ vem $\mathcal{B}(C) \rightarrow \infty$, para $\beta_2 < 0$; quando $C \rightarrow -\infty$ vem $\mathcal{B}(C) \rightarrow \infty$, para $\beta_2 > 0$. Mas, como B_0 é proporcional a $\mathcal{B}(C)$, significa isto que é possível que o débito binário possa crescer ilimitadamente? Na realidade, não: como o valor de T_b é constante, desde a entrada até à saída da fibra, tal crescimento ilimitado nunca se verifica. Com efeito, para $\beta_2 C < 0$, há situações em que o valor mínimo encontrado para σ , à saída, é inferior ao valor de entrada σ_0 . De facto, a equação $\sigma = \sigma_0$ tem solução para $\beta_2 C < 0$: neste caso existe um valor $C = C_0$ que é solução da equação

$$(|\beta_2|L) \left[\text{sgn}(\beta_2) C_0 + \sqrt{1 + C_0^2} \right] = \sqrt{1 + C_0^2} \frac{|\beta_2|L}{2},$$

pelo que (ver Fig. 11)

$$\boxed{\text{sgn}(\beta_2) C_0 = -\frac{1}{\sqrt{3}}} \mapsto \boxed{\mathcal{B}(C_0) = \sqrt[4]{3}}.$$

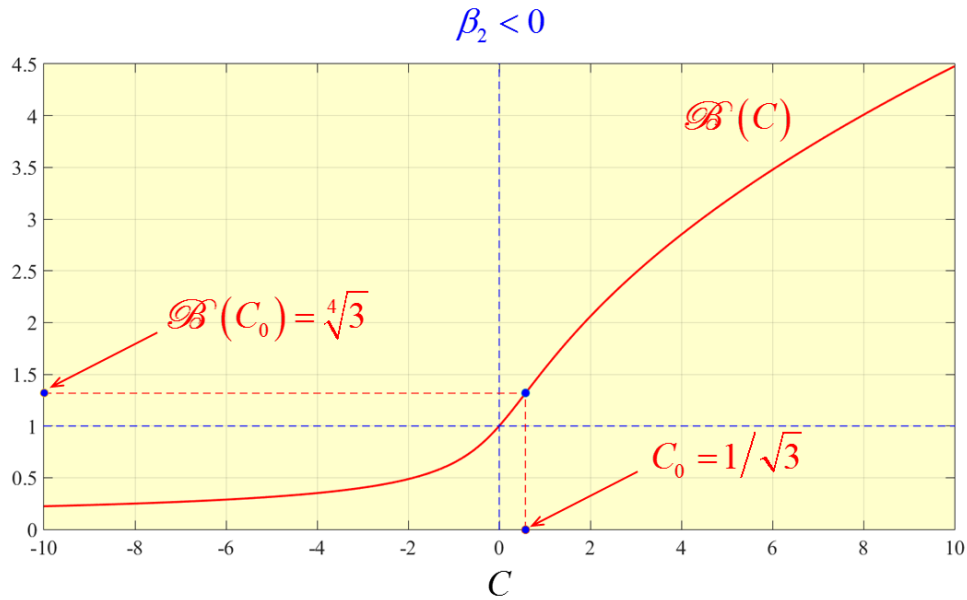


Figura 12

Isto mostra que a anterior expressão para B_0 estava incorrecta. Na verdade, essa expressão tem de ser corrigida para

$$\text{valor máximo do débito binário} \mapsto B_0 = \frac{\mathcal{F}(C)}{4\sqrt{|\beta_2|L}}$$

em que se definiu uma nova função $\mathcal{F} = \mathcal{F}(C)$, tal que

$$\text{sgn}(\beta_2)C < -\frac{1}{\sqrt{3}} \mapsto B_0 = \frac{1}{4\sigma_0} = \frac{1}{4\sqrt{|\beta_2|L}} \left(\frac{2}{\sqrt{1+C^2}} \right)^{1/2}.$$

Ou seja:

$$\mathcal{F}(C) = \begin{cases} \left(\frac{2}{\sqrt{1+C^2}} \right)^{1/2}, & \text{sgn}(\beta_2)C \leq -\frac{1}{\sqrt{3}}, \\ \left(\frac{1}{\text{sgn}(\beta_2)C + \sqrt{1+C^2}} \right)^{1/2}, & \text{sgn}(\beta_2)C \geq -\frac{1}{\sqrt{3}}. \end{cases}$$

Na Fig. 13 apresenta-se $\mathcal{F} = \mathcal{F}(C)$ para a zona de dispersão anómala.

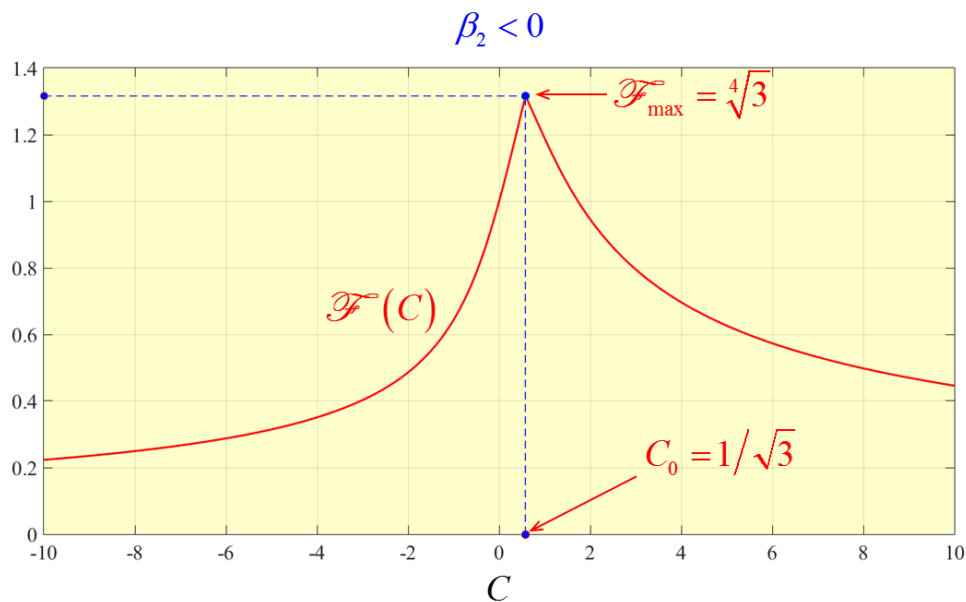


Figura 13

Deste modo, o máximo possível de B_0 é dado por

$$B_0^{\max} = \frac{\mathcal{F}_{\max}}{4\sqrt{|\beta_2|L}} = \frac{\sqrt[4]{3}}{4\sqrt{|\beta_2|L}} \approx \frac{0.329}{\sqrt{|\beta_2|L}}.$$

Por exemplo: se $L=100$ km e $\beta_2 = -20$ ps²/km (com uma portadora em $\lambda = 1550$ nm), obtém-se um valor $B_0^{\max} = 7.35$ Gb/s. Na Fig. 14 apresenta-se a variação do valor máximo B_0 do débito binário em função do trinado C quando se consideram $L=100$ km e $\beta_2 = -20$ ps²/km. Uma figura de mérito do comportamento digital da fibra óptica é o produto $B_0^2 L$. Quando se desprezam as perdas, tal como nesta secção, resulta então

$$B_0^2 L = \frac{\mathcal{F}^2(C)}{16|\beta_2|}.$$

Na Fig. 15 mostra-se a variação desta figura de mérito com o trinado quando se considera $\beta_2 = -20$ ps²/km.

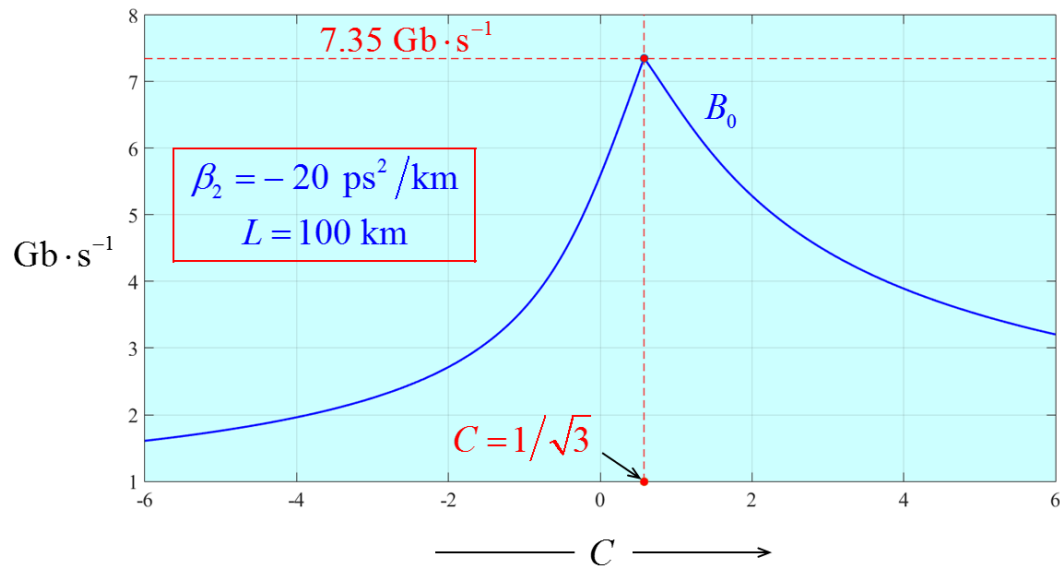


Figura 14

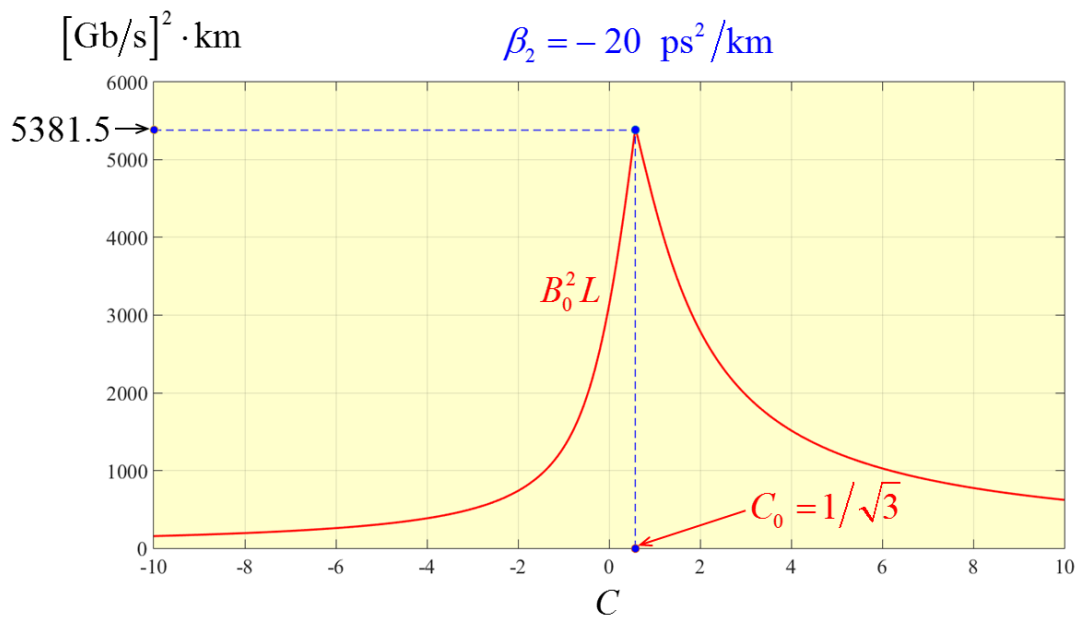


Figura 15

Tudo o que se disse até aqui foi baseado na suposição de que a fibra transmite um único canal. Actualmente, porém, as fibras ópticas podem transmitir diferentes canais sobre a sua estrutura física. Isto é possível graças à *multiplexagem no comprimento de onda* ou WDM (em inglês: *wavelength-division multiplexing*).

Sem entrar aqui em pormenores técnicos específicos deste tipo de sistemas de comunicação óptica, podemos considerar que – nos sistemas WDM – o débito binário total B (ou *capacidade* do sistema WDM) é a soma dos débitos binários dos vários canais. Estamos, aqui, a fazer uma hipótese simplificativa: o sistema funciona em regime linear e, mesmo neste regime, a interferência entre os diferentes canais (em inglês: *interchannel crosstalk*) é desprezável. Para que esta *diafonia* seja realmente desprezável, é necessário que – nos sistemas com detecção directa – a eficiência espectral do sistema WDM seja inferior à unidade (nos sistemas WDM com detecção coerente é possível uma eficiência espectral superior à unidade).

Seja $f_1 \leq f \leq f_2$ o intervalo de frequências coberto pelo sistema WDM, i.e., tem-se $\Delta f = f_2 - f_1$. Em termos de comprimentos de onda (medidos no vácuo) isto corresponde a

$$\Delta\lambda = \lambda_1 - \lambda_2 = \frac{c}{f_1} - \frac{c}{f_2} = c \frac{\Delta f}{f_1 f_2}.$$

Vamos admitir, doravante, que os canais têm idênticas larguras espectrais, cada canal com Δf_{ch} . Assim, sendo N_{ch} o número total de canais, vem

$$\text{número de canais WDM} \mapsto \boxed{N_{\text{ch}} = \frac{\Delta f}{\Delta f_{\text{ch}}}}.$$

Se o débito binário de cada canal for B_{ch} (recorde-se que se consideram canais idênticos), a capacidade do sistema WDM será

$$\text{capacidade do sistema WDM} \mapsto \boxed{B = N_{\text{ch}} B_{\text{ch}}}.$$

A eficiência espectral do sistema WDM é η_s , tal que

$$\boxed{\eta_s = \frac{B_{\text{ch}}}{\Delta f_{\text{ch}}}} \mapsto \boxed{B = \eta_s \Delta f}.$$

Por exemplo: se se utilizar uma *dry fiber* (que tem uma atenuação onde o pico de absorção OH foi eliminado), podemos eventualmente utilizar a fibra entre $\lambda_1 = 1.6 \mu\text{m}$ e $\lambda_2 = 1.3 \mu\text{m}$. Neste caso, então, será $\Delta f = c/\lambda_0$, com $\lambda_0 = \lambda_1\lambda_2/(\lambda_1 - \lambda_2) = (104/15) \mu\text{m}$. Assim $\Delta f = 43.25 \text{ THz}$ e, se se utilizar uma largura espectral de cada canal $\Delta f_{\text{ch}} = 50 \text{ GHz}$, obtém-se um total de $N_{\text{ch}} = \Delta f / \Delta f_{\text{ch}} = 865$ canais. Logo, para um débito binário de cada canal $B_{\text{ch}} = 40 \text{ Gb/s}$, a eficiência espectral será $\eta_s = 0.8 \text{ b/s/Hz}$. Por sua vez, a capacidade do sistema WDM corresponde a $B = 865 \times 40 \text{ Gb/s} = 34.6 \text{ Tb/s}$.

5. Dispersão e perdas

As fibras ópticas foram e continuam a ser umas das ferramentas tecnológicas essenciais da moderna revolução digital. A Fig. 16 mostra um conjunto de várias fibras ópticas de sílica. A sílica (ou dióxido de silício, SiO_2) é o principal componente da areia e a matéria prima para o vidro.



Figura 16

Sem os actuais sistemas de comunicação por fibra óptica seria impossível falar em *autoestradas da informação* (em inglês: *information highway*; abreviatura inspirada do alemão: *infobahn*). A isso não é estranha a revolução na atenuação nas fibras ópticas (observada já na segunda metade do século XX). Como é sabido, a atenuação em dB (decibéis) define-se como segue:

$$\text{atenuação [dB]} = 10 \times \log_{10} \left(\frac{\text{intensidade à entrada [W]}}{\text{intensidade à saída [W]}} \right).$$

Sir Charles Kuen Kao (1933-) recebeu o prémio Nobel da Física de 2009 pelo seu trabalho pioneiro sobre a transmissão da luz em fibras ópticas, tendo em vista a sua utilização nos modernos sistemas de comunicação. Foi ele um dos primeiros advogados da utilização de fibras monomodais (em inglês: SMF = *single-mode fibers*), em detrimento das fibras multimodais (em inglês: MMF = *multi-mode fibers*), de forma a tornar realidade o grande objectivo de alcançar elevados débitos binários (actualmente na ordem dos Tb/s). Com efeito, foi ele que escreveu em 1966 – em colaboração com

George Hockham (1938-2013) – um artigo pioneiro onde se demonstrou teoricamente a possibilidade de diminuir drasticamente a atenuação de uma fibra óptica ao remover impurezas do material.

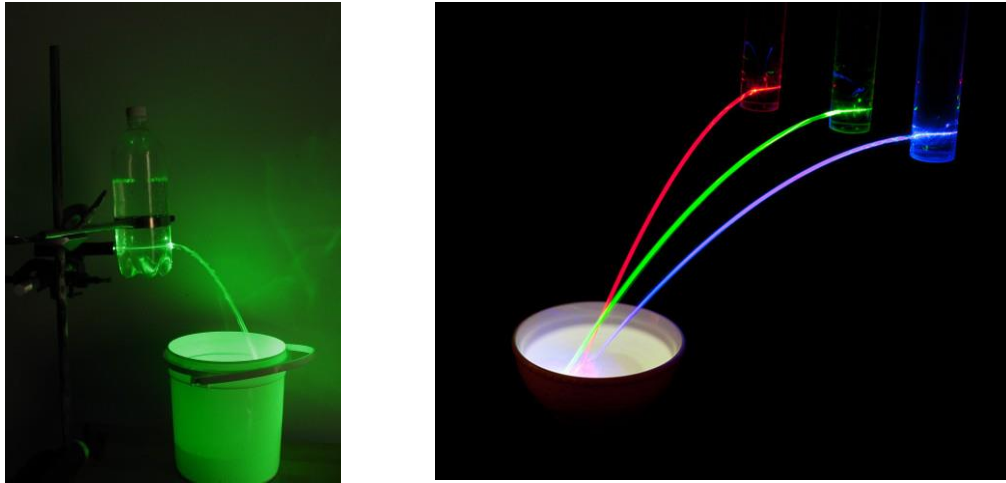
A Tabela em anexo mostra as janelas de transmissão utilizadas pelos modernos sistemas de comunicação por fibra óptica.

TABELA: Janelas de transmissão

Banda	Descrição	Comprimentos de onda
O	Original	1260 a 1360 nm
E	Extended	1360 a 1460 nm
S	Short wavelengths	1460 a 1530 nm
C	Conventional	1530 a 1565 nm
L	Long wavelengths	1565 a 1625 nm
U	Ultralong wavelengths	1625 a 1675 nm

Em Setembro de 1970, Robert Maurer, Donald Keck e Peter Schultz, da *Corning Glass Works* (actualmente, *Corning Inc.*), anunciaram que tinham conseguido fabricar fibras monomodais com bainha de sílica fundida e núcleo de sílica dopada com titânio, a operar numa portadora de 633 nm, com uma atenuação de 16 dB/km. Isto marcava um ponto de viragem importante.

Recuando até aos anos 40 do século XIX, Daniel Collodon e Jacques Babinet mostraram que a luz poderia ser dirigida, por intermédio de jactos de água, de forma a dar origem a fontes luminosas. Em 1854 o físico britânico John Tyndall (1820-1893) conseguiu curvar a trajectória da luz, ao longo da sua propagação num jacto de água, devido à *reflexão interna total* na interface água-ar – Fig. 17.



Figuras 17a (esquerda) e 17b (direita)

A propagação de ondas electromagnéticas numa fibra óptica obedece, também, ao mesmo princípio: a reflexão interna total, neste caso na interface entre o núcleo (de índice de refração n_1) e a bainha (de índice de refração n_2).

A história da evolução tecnológica dos sistemas de comunicação por fibra óptica não é fácil de contar: muitas personalidades concorreram para o sucesso que, hoje em dia, é indiscutível. Por exemplo: o primeiro cabo submarino transatlântico, o TAT-8, começou a ser operado no final de 1988. Actualmente, com os sistemas WDM, a barreira dos Tb/s foi ultrapassada. As distâncias e os débitos binários têm crescido. Há, porém, um objectivo (ainda) não atingido de forma universal – levar a fibra até à casa do consumidor num sistema FTTH (do inglês: *fiber to the home*) e não apenas FTTC (do inglês: *fiber to the curve*).

«New concepts can outflank logical extrapolations of established knowledge, as the optical fiber beat out the millimeter waveguide. A pure and elegant idea can trump a technological compromise, as single-mode fiber proved far superior to graded-index fiber. Experts enamored of their own approaches can completely miss other possibilities, as Bell did when it ignored Charles Kao to concentrate on hollow optical waveguides. And as Kao showed

when he asked about glass transmission, fundamental limits can be more important than the state of the art.»

Jeff Hecht, *City of Light – The Story of Fiber Optics*. New York: Oxford University Press, 1999 (p. 230)

«It was suggested in 1966 that optical fibers might be the best choice [1], as they are capable of guiding the light in a manner similar to the guiding of electrons in copper wires. The main problem was the high losses of optical fibers – fibers available during the 1960s had losses in excess of 1000 dB/km. A breakthrough occurred in 1970 when fiber losses could be reduced to below 20 dB/km in the wavelength region near 1 μm [2].

(...) The first generation of lightwave systems operated near 0.8 μm and used GaAs semiconductor lasers. After several field trials during the period 1977-79, such systems became available commercially in 1980 [3]. They operated at a bit rate of 45 Mb/s and allowed repeater spacings of up to 10 km. The larger repeater spacing compared with 1 km-spacing of coaxial systems was an important motivation for system designers because it decreased the installation and maintenance costs associated with each repeater.

(...) In a 2010 experiment [4], a new record was established when a 64 Tb/s-transmission was realized over 320 km using 640 WDM channels that spanned both the C and L bands with 12.5-GHz channel spacing.»

Govind P. Agrawal, *Fiber-Optic Communication Systems, Fourth Edition*. Hoboken, NJ: Wiley, 2010 (pp. 4–8).

[1] C. K. Kao and G. A. Hocham, *Proc. IEEE* **133**, 1151 (1966); A. Werts, *Onde Electr.* **45**, 967 (1966).

[2] F. P. Kapron, D. B. Keck, and R. D. Maurer, *Appl. Phys. Lett.* **17**, 423 (1970).

[3] R. J. Sanferrare, *AT&T Tech. J.* **66**, 95 (1987).

[4] X. Zhou, J. Yu, M.-F. Huang, et al., *Proc. Opt. Fiber Commun. Conf.*, Paper PDPB9 (2010).

Existem, basicamente, duas formas de WDM: (i) CWDM (em inglês: *Coarse Wavelength Division Multiplexing*); (ii) DWDM (em inglês: *Dense Wavelength Division Multiplexing*). Como o próprio

nome indica, em DWDM o espaçamento entre canais é mais estreito do que em CWDM. Por exemplo: de acordo com a recomendação ITU-T G.694.1 (de Fevereiro de 2012), o espaçamento entre canais com uma grelha fixa, utilizada em DWDM, pode ser $\Delta f_{\text{ch}} = 12.5 \text{ GHz}$, 25 GHz , 50 GHz , 100 GHz a que correspondem frequências centrais

$$f_0 [\text{THz}] = 193.1 + n \times \Delta f_{\text{ch}} [\text{GHz}] \times 10^{-3}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Se se fizer, e.g., $n = 208$, obtém-se $f_0 = 195.7000 \text{ THz}$ quando $\Delta f_{\text{ch}} = 12.5 \text{ GHz}$. O mesmo valor de f_0 requer $n = 104$ para $\Delta f_{\text{ch}} = 25 \text{ GHz}$, $n = 52$ para $\Delta f_{\text{ch}} = 50 \text{ GHz}$ e $n = 26$ para $\Delta f_{\text{ch}} = 100 \text{ GHz}$. O comprimento de onda central $\lambda_0 = c/f_0$ resulta aplicando o valor $c = 2.99792458 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$: $\lambda_0 \approx 1531.8981 \text{ nm}$.

Note-se que, depois de 2007, os sistemas WDM comerciais começaram a suportar débitos binários de $B_{\text{ch}} = 100 \text{ Gb} \cdot \text{s}^{-1}$ por canal. Assim, basta ter um número de canais WDM com $N_{\text{ch}} = 10$ para se atingir uma capacidade $B = B_{\text{ch}} N_{\text{ch}} = 1 \text{ Tb} \cdot \text{s}^{-1}$. Em 2014 foi anunciado que uma única fibra óptica conseguiu demonstrar experimentalmente uma transmissão WDM com uma capacidade máxima de $B = 255 \text{ Tb} \cdot \text{s}^{-1} \approx 32 \text{ TB} \cdot \text{s}^{-1}$ ao longo de $L = 1 \text{ km}$:

<http://www.nature.com/nphoton/journal/v8/n11/full/nphoton.2014.243.html>

As perdas determinaram, como se disse, a viabilidade inicial dos sistemas de comunicação óptica. Na Fig. 18 representa-se a variação do coeficiente de atenuação para uma SMF (*single-mode fiber*) produzida em 1979. Esta fibra apresentava uma atenuação mínima $\alpha = 0.2 \text{ dB} \cdot \text{km}^{-1}$ para $\lambda \approx 1.55 \mu\text{m}$ – o que se aproximava, razoavelmente, do limite fundamental (imposto pela dispersão de Rayleigh) para as fibras de sílica, a saber: $\alpha = 0.16 \text{ dB} \cdot \text{km}^{-1}$. O pico da absorção desta fibra ocorria para $\lambda = 1.39 \mu\text{m}$.

As perdas têm, assim, duas origens fundamentais: (i) a dispersão de Rayleigh; (ii) a absorção material. Por sua vez, a absorção material divide-se em duas formas: (ii-1) intrínseca; (ii-2) extrínseca. A absorção material intrínseca deve-se directamente à sílica fundida – o material básico de que as fibras são feitas. Já a absorção material extrínseca deve-se à existência de impurezas estranhas à sílica. Um novo tipo de fibras – conhecidas por *dry fibers* – conseguiu eliminar o pico de absorção observado

para $\lambda = 1.39 \mu\text{m}$ ao reduzir drasticamente a concentração em OH. A Fig. 19 compara este novo tipo de fibra com uma fibra convencional.

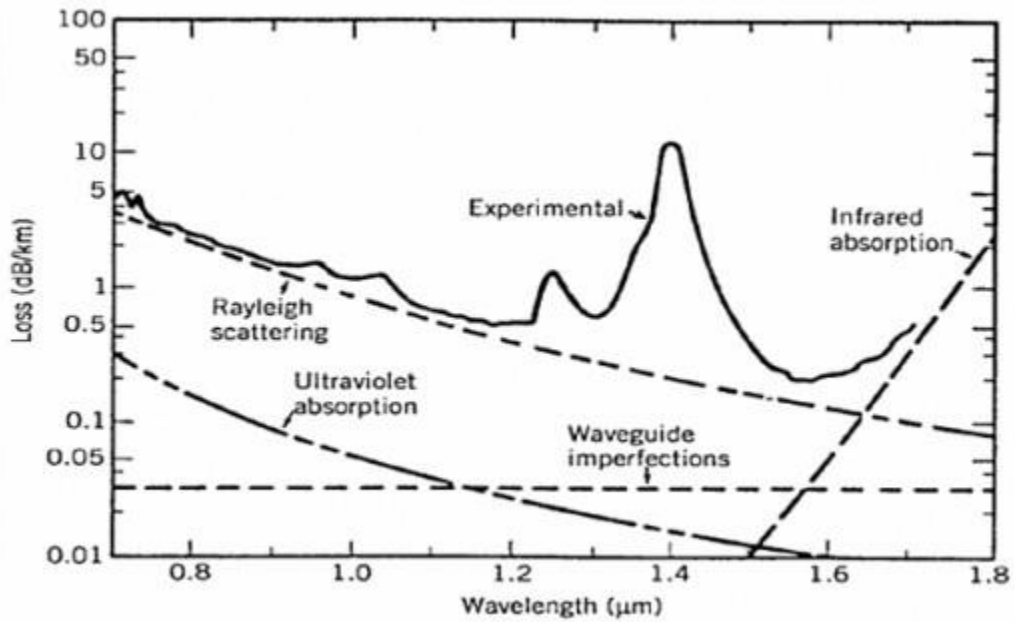


Figura 18

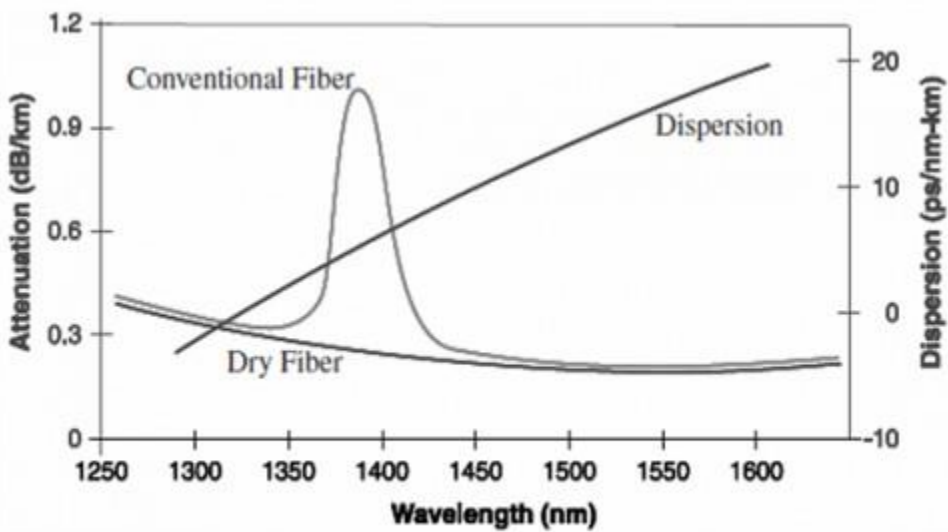


Figura 19

A atenuação é, portanto, um problema essencialmente superado. Acresce que, com o aparecimento dos amplificadores ópticos – nomeadamente, com o aparecimento das EDFAs (*erbium-doped fiber amplifiers*) e dos amplificadores Raman –, o principal problema que subsiste é o colocado pela dispersão.

Segue-se uma análise fenomenológica da dispersão cromática de fibras ópticas monomodais que se baseia na aproximação de Sellmeier. Consideram-se dois casos.

Primeiro Caso

Este primeiro caso insere-se na banda O e refere-se ao intervalo $1270 \text{ nm} \leq \lambda \leq 1340 \text{ nm}$. O objectivo é o de determinar a dispersão em fibras ópticas convencionais. O ponto de partida é a seguinte equação de Sellmeier para o atraso de grupo:

$$\tau_g(\lambda) = A + B\lambda^2 + C\lambda^{-2}.$$

Nesta equação as características específicas de uma dada fibra são, então, determinadas a partir das três constantes A , B , e C . A primeira coisa a fazer é reescrever o atraso de grupo na forma

$$\tau_g(\lambda) = A + B\lambda^2 \left(1 + \frac{C}{B}\lambda^{-4} \right).$$

O coeficiente de dispersão é, deste modo, dado por

$$D(\lambda) = \frac{1}{L} \frac{d\tau_g}{d\lambda} = \frac{2B\lambda}{L} \left(1 - \frac{C}{B}\lambda^{-4} \right).$$

Define-se, então, o comprimento de onda λ_D em que a DVG se anula, i.e., tal que $D(\lambda_D) = 0$. Nestas condições, vem $C/B = \lambda_D^4$. Logo,

$$D(\lambda) = \frac{2B\lambda}{L} \left[1 - \left(\frac{\lambda_D}{\lambda} \right)^4 \right].$$

Além disso, vem

$$\tau_g(\lambda) = A + B\lambda^2 \left[1 + \left(\frac{\lambda_D}{\lambda} \right)^4 \right].$$

Em particular, se $\tau_g(\lambda_D) = \tau_D$, infere-se que

$$\tau_D = A + 2B\lambda_D^2 \Rightarrow \tau_g(\lambda) = \tau_D + B\lambda^2 \left[1 - \left(\frac{\lambda_D}{\lambda} \right)^2 \right]^2.$$

Finalmente, se se definir o declive da dispersão (ou, a dispersão de ordem superior)

$$S = \frac{dD}{d\lambda},$$

obtém-se

$$S(\lambda) = \frac{2B}{L} \left[1 + 3 \left(\frac{\lambda_D}{\lambda} \right)^4 \right].$$

Note-se que, no caso geral, se tem

$$\boxed{D = -\frac{2\pi c}{\lambda^2} \beta_2} \Rightarrow \boxed{S = \frac{4\pi c}{\lambda^3} \beta_2 + \left(\frac{2\pi c}{\lambda^2} \right)^2 \beta_3}.$$

Assim, definindo $S(\lambda_D) = S_D$, tira-se que $S_D = 8B/L$. Em conclusão:

$$\left[\begin{array}{l} A = \tau_D - \frac{\lambda_D^2 S_D L}{4} \\ B = \frac{S_D L}{8} \\ C = \frac{\lambda_D^4 S_D L}{8} \end{array} \right] \mapsto \left[\begin{array}{l} \tau_g(\lambda) = \tau_D + \frac{S_D L}{8\lambda^2} (\lambda^2 - \lambda_D^2)^2 \\ D(\lambda) = \frac{\lambda S_D}{4} \left[1 - \left(\frac{\lambda_D}{\lambda} \right)^4 \right] \\ S(\lambda) = \frac{S_D}{4} \left[1 + 3 \left(\frac{\lambda_D}{\lambda} \right)^4 \right] \end{array} \right].$$

Uma fibra óptica convencional típica é, e.g., o caso da Corning SMF-28 que tem $\lambda_D = 1310 \text{ nm}$ e $S_D = 0.090 \text{ ps}/(\text{km} \cdot \text{nm}^2)$. A Fig. 20 ilustra este caso.

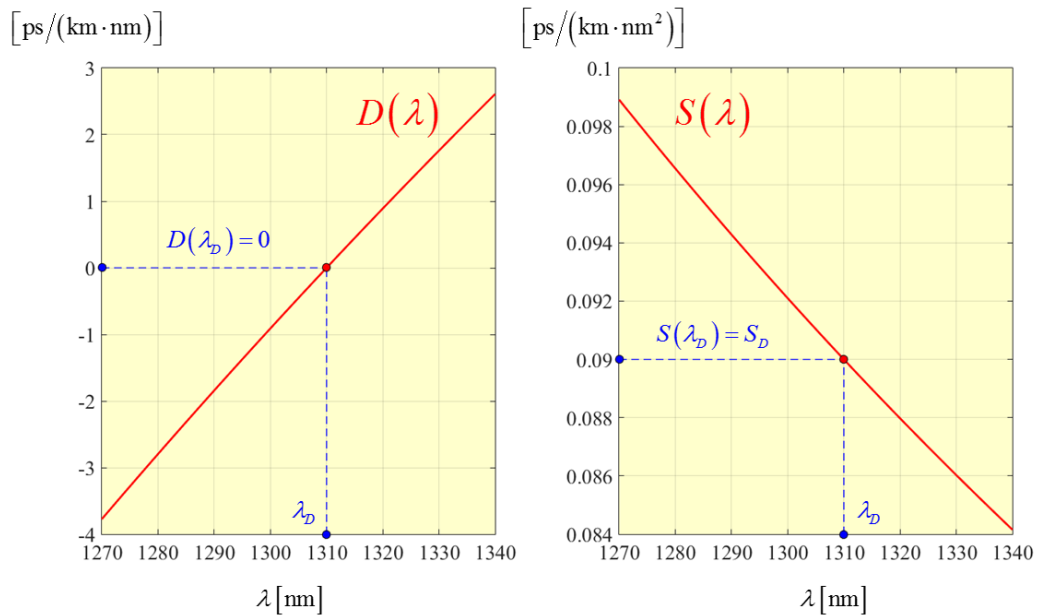


Figura 20

Segundo Caso

Este segundo caso refere-se a *fibras de dispersão modificada* em que a fibra é dimensionada de forma a ter o anulamento da DVG perto do mínimo de atenuação. Neste caso pretende-se abranger o intervalo $1500 \text{ nm} \leq \lambda \leq 1600 \text{ nm}$ e considera-se a seguinte expressão de Sellmeier para o atraso de grupo:

$$\tau_g(\lambda) = A + B\lambda + C\lambda^2.$$

Assim, neste caso,

$$D(\lambda) = \frac{1}{L} \frac{d\tau_g}{d\lambda} = \frac{B}{L} \left(1 + 2 \frac{C}{B} \lambda \right).$$

Logo, $B/C = -2\lambda_D$, vindo

$$D(\lambda) = \frac{B}{L} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_D} \right) \Rightarrow S(\lambda) = -\frac{B}{\lambda_D L}.$$

Consequentemente,

$$\left[\begin{array}{l} A = \tau_D + \frac{\lambda_D^2 S_D L}{2} \\ B = -\lambda_D S_D L \\ C = \frac{S_D L}{2} \end{array} \right] \mapsto \left[\begin{array}{l} \tau_g(\lambda) = \tau_D + \frac{S_D L}{2} (\lambda - \lambda_D)^2 \\ D(\lambda) = S_D (\lambda - \lambda_D) \\ S(\lambda) = S_D \end{array} \right].$$

Um caso típico é a fibra Corning LEAF que é, de facto, uma DS-SMF (*dispersion-shifted single-mode fiber*) com $\lambda_D = 1495 \text{ nm}$ e $S_D = 0.060 \text{ ps}/(\text{km} \cdot \text{nm}^2)$. A Fig. 21 ilustra este caso que corresponde a uma NZDSF (*non-zero dispersion-shifted fiber*) já que esta fibra é utilizada num intervalo em que a DVG nunca se anula (embora permaneça baixa).

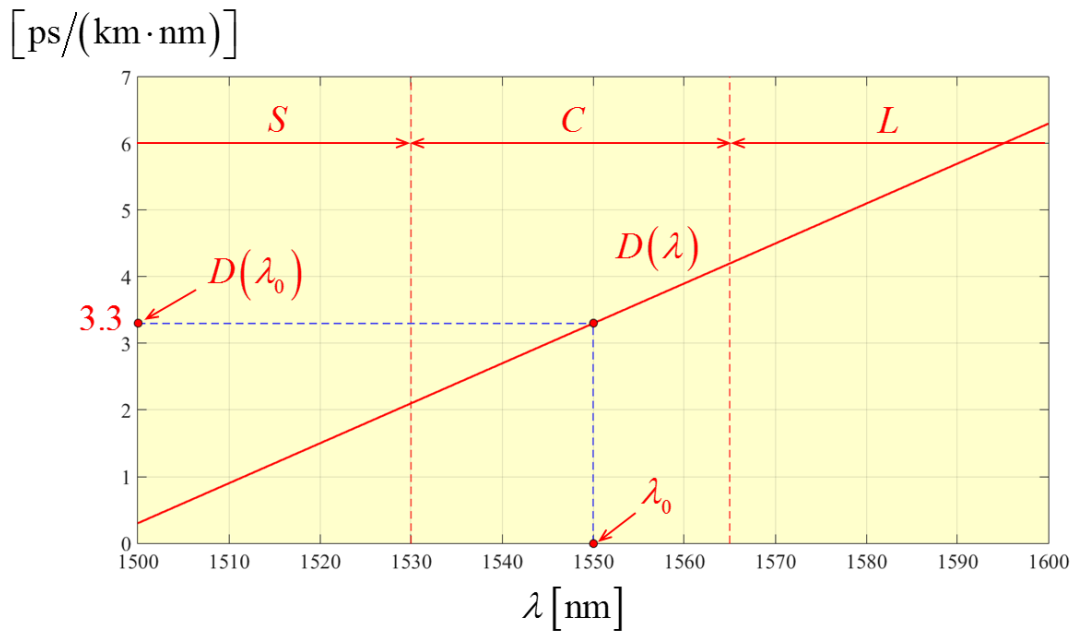


Figura 21

6. Análise modal aproximada

Só agora, nesta secção, é que se vai proceder à *análise modal* da fibra óptica. Mas, em vez de se proceder a uma análise rigorosa, apresenta-se uma análise *aproximada* que é, no entanto, válida para a quase totalidade das situações práticas. Consideremos, então, a fibra representada na Fig. 22: o núcleo, de índice de refração n_1 , tem um diâmetro (da sua secção transversal) $\Phi = 2a$; a bainha, de índice de refração n_2 , é considerada ilimitada (i.e., supõe-se que o raio ρ da sua secção transversal é $\rho \rightarrow \infty$).

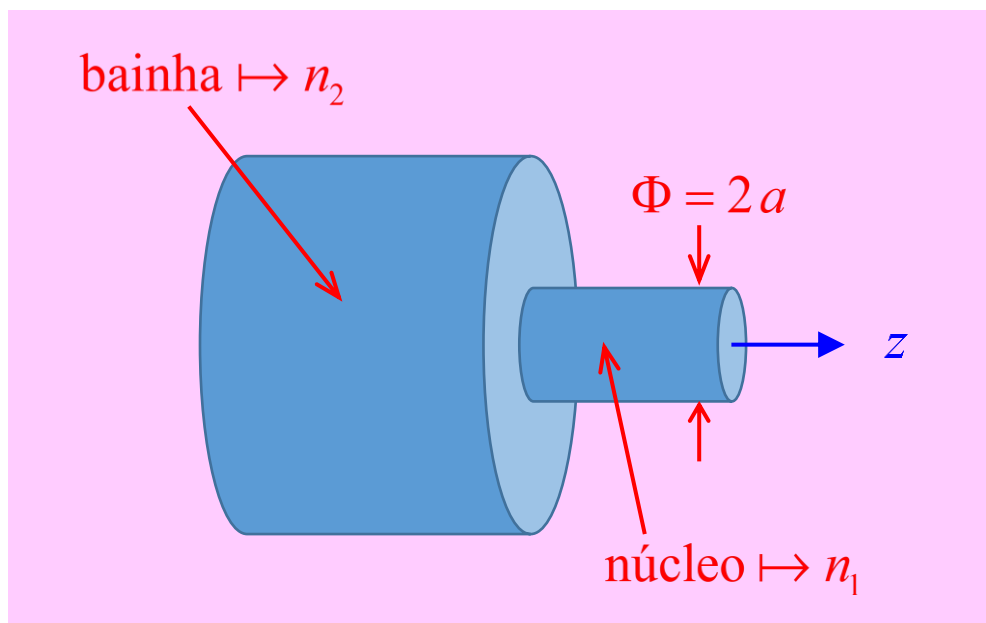


Figura 22

Como se indica na Fig. 23, admite-se um *perfil em degrau* do índice de refração:

$$\begin{cases} \mathbf{D} = \varepsilon_0 n^2(r) \mathbf{E} \\ \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} \end{cases} \mapsto n(r) = \begin{cases} n_1, & r \leq a, \\ n_2, & r > a, \end{cases}$$

com

$$n_2 = n_1 \sqrt{1 - 2\Delta},$$

onde Δ é o contraste dielétrico. Consideram-se coordenadas cilíndricas (Fig.2) onde z é o eixo da fibra; a secção transversal (plano xy) é descrita pelas coordenadas polares (r, θ) .

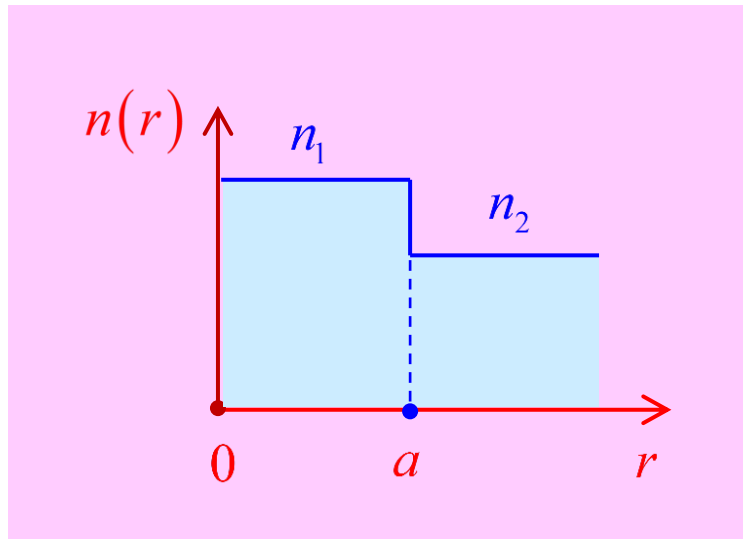


Figura 23

Qualquer componente do campo electromagnético tem a forma

$$\Psi(r, \theta, z, t) = F(r, \theta) \exp[i(\beta z - \omega t)].$$

Note-se que, como não estamos centrados no estudo da propagação de impulsos, podemos considerar ondas monocromáticas cuja variação temporal é exclusivamente dada por $\exp(-i\omega t)$. Além disso

$\Psi(r, \theta, z, t)$ satisfaz a equação de propagação

$$\nabla^2 \Psi - \frac{1}{v_p^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0, \quad v_p = \frac{c}{n(r)}.$$

Logo, obtém-se a equação de Helmholtz

$$\nabla^2 \Psi + n^2(r) k_0^2 \Psi = 0, \quad k_0 = \frac{\omega}{c}.$$

Em coordenadas cilíndricas, vem

$$\nabla^2 \Psi = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2}.$$

Infere-se, deste modo, que

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} + [n^2(r) k_0^2 - \beta^2] F(r, \theta) = 0.$$

Iremos, ainda, considerar que a variação azimutal é exclusivamente da forma $\exp(i\ell\theta)$. Isto é razoável porque se tem

$$\exp[i\ell(\theta + 2\pi)] = \exp(i\ell\theta) \exp(2i\pi\ell) = [\cos(2\pi\ell) + i \sin(2\pi\ell)] \exp(i\ell\theta) = \exp(i\ell\theta).$$

Mas então, admitindo que

$$F(r, \theta) = \xi(r) \exp(i\ell\theta),$$

obtém-se a seguinte equação diferencial:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \xi}{\partial r} + \left[n^2(r) k_0^2 - \beta^2 - \frac{\ell^2}{r^2} \right] \xi(r) = 0.$$

Definamos, então,

$$\begin{aligned} h^2 &= n_1^2 k_0^2 - \beta^2 \\ \alpha^2 &= \beta^2 - n_2^2 k_0^2 \end{aligned}.$$

A anterior equação diferencial assume, nestas condições, a forma de uma equação diferencial de Bessel

$$r < a \quad \mapsto \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \xi}{\partial r} + \left(h^2 - \frac{\ell^2}{r^2} \right) \xi(r) = 0$$

no núcleo e a forma de uma equação de Bessel modificada

$$r > a \quad \mapsto \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \xi}{\partial r} - \left(\alpha^2 + \frac{\ell^2}{r^2} \right) \xi(r) = 0$$

na bainha. A solução genérica tem, então, a forma

$$\xi(r) = \begin{cases} A J_\ell(hr) + A' Y_\ell(hr), & r < a, \\ B' I_\ell(\alpha r) + B K_\ell(\alpha r), & r > a. \end{cases}$$

Designou-se por $J_\ell(hr)$ a função de Bessel de primeira espécie e ordem ℓ , por $Y_\ell(hr)$ a função de Bessel de segunda espécie e ordem ℓ , por $I_\ell(\alpha r)$ a função de Bessel modificada de primeira espécie e ordem ℓ e por $K_\ell(\alpha r)$ a função de Bessel modificada de segunda espécie e ordem ℓ . Porém, tem-se

$$\lim_{r \rightarrow 0} Y_\ell(hr) = -\infty, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} I_\ell(\alpha r) = \infty.$$

Como o comportamento destas funções é fisicamente inaceitável, faz-se $A' = B' = 0$. E, assim, fica apenas

$$\xi(r) = \begin{cases} A J_\ell(hr), & r < a, \\ B K_\ell(\alpha r), & r > a. \end{cases}$$

Para fibras ópticas de pequeno contraste dieléctrico (i.e., em que $\Delta \ll 1$) o campo electromagnético é fracamente guiado e podemos utilizar, na prática, as seguintes condições aproximadas sobre a interface núcleo-bainha:

$$\Delta \ll 1 \quad \mapsto \quad \begin{cases} \xi(a^-) = \xi(a^+) \\ \xi'(a^-) = \xi'(a^+) \end{cases}.$$

Designou-se por $\xi'(r)$ a derivada $d\xi/dr$. A continuidade da função $\xi(r)$ em $r = a$ implica que

$$\xi(r) = \begin{cases} \frac{A}{J_\ell(u)} J_\ell\left(\frac{r}{a} u\right), & r < a, \\ \frac{A}{K_\ell(w)} K_\ell\left(\frac{r}{a} w\right), & r > a. \end{cases} \Rightarrow \xi(a) = A.$$

Se se escolher $A = J_\ell(u)$ tem-se $\xi(0) = J_\ell(0)$. Na expressão para $\xi(r)$ introduziram-se as seguintes variáveis adimensionais:

$$\begin{cases} u = ha = a \sqrt{n_1^2 k_0^2 - \beta^2} \\ w = \alpha a = a \sqrt{\beta^2 - n_2^2 k_0^2} \end{cases}.$$

Note-se que, se se introduzir o índice de refração modal

$$\bar{n} = \frac{\beta}{k_0},$$

vem, conseqüentemente,

$$\begin{cases} u^2 = (k_0 a)^2 (n_1^2 - \bar{n}^2) \\ w^2 = (k_0 a)^2 (\bar{n}^2 - n_2^2) \end{cases} \Rightarrow u^2 + w^2 = v^2.$$

Para a obtenção da última equação usou-se a definição de frequência normalizada da fibra

$$v = k_0 a \sqrt{n_1^2 - n_2^2} = 2\pi \frac{a}{\lambda} \sqrt{n_1^2 - n_2^2} = 2\pi \frac{a}{\lambda} n_1 \sqrt{2\Delta}.$$

Frequentemente, também, introduz-se a constante de propagação longitudinal normalizada (um número adimensional também)

$$b = 1 - \frac{u^2}{v^2} = \frac{w^2}{v^2} = \frac{\bar{n}^2 - n_2^2}{n_1^2 - n_2^2} \Rightarrow \begin{cases} u = v \sqrt{1-b} \\ w = v \sqrt{b} \end{cases}.$$

No corte é $\bar{n} = n_2$ e $b = 0$. Por outro lado,

$$\lim_{v \rightarrow \infty} b = 1 \Rightarrow \lim_{v \rightarrow \infty} \bar{n} = n_1.$$

Ou seja: à medida que a frequência aumenta o campo electromagnético tende a ficar cada vez mais confinado à zona junto ao eixo da fibra. Para um dado *modo superficial*, tem-se (para a fibra operada numa dada frequência normalizada v)

$$\begin{cases} n_2 k_0 \leq \beta < n_1 k_0 \\ n_2 \leq \bar{n} < n_1 \\ 0 \leq b < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v \geq u > 0 \\ 0 \leq w < v \end{cases}.$$

Como se pode facilmente verificar, a constante de propagação longitudinal β obtém-se da expressão

$$\beta = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{v^2}{2\Delta} - u^2} = \frac{v}{a} \sqrt{\frac{1 - 2(1-b)\Delta}{2\Delta}}.$$

A equação modal do guia superficial obtém-se pela aplicação da segunda condição sobre a interface núcleo-bainha que (ainda) não foi aplicada: a continuidade de $d\xi/dr$ em $r = a$. Assim, vem

$$u J'_\ell(u) K_\ell(w) = w J_\ell(u) K'_\ell(w),$$

que é a *equação modal* dos modos superficiais da fibra óptica na aproximação de pequeno contraste dieléctrico. Notando, então, que se tem

$$\begin{cases} J'_\ell(u) = \pm J_{\ell\mp 1}(u) \mp \frac{\ell}{u} J_\ell(u), \\ K'_\ell(w) = -K_{\ell\mp 1}(w) \mp \frac{\ell}{w} K_\ell(w), \end{cases}$$

é possível reescrever a equação modal na forma

$$\text{equação modal} \quad \mapsto \quad \boxed{u \frac{J_{\ell\pm 1}(u)}{J_\ell(u)} = \pm w \frac{K_{\ell\pm 1}(w)}{K_\ell(w)}}.$$

Atendendo a que

$$\begin{cases} J_{-\ell}(u) = (-1)^\ell J_\ell(u), \\ K_{-\ell}(w) = K_\ell(w), \end{cases}$$

a equação modal permanece a mesma se se fizer a substituição $\ell \mapsto -\ell$. Por outras palavras: os modos com índices (ℓ, m) e $(-\ell, m)$ têm a mesma constante longitudinal β de propagação. Logo, podemos combinar a respectiva variação transversal numa soma ou numa diferença:

$$\begin{cases} \xi(r) \exp(i\ell\theta) + \xi(r) \exp(-i\ell\theta) = 2\xi(r) \cos(\ell\theta), \\ \xi(r) \exp(i\ell\theta) - \xi(r) \exp(-i\ell\theta) = 2i\xi(r) \sin(\ell\theta). \end{cases}$$

A correspondente intensidade luminosa é dada por

$$\boxed{\begin{aligned} I(r, \theta) &\propto \xi^2(r) \cos^2(\ell\theta) \\ I(r, \theta) &\propto \xi^2(r) \sin^2(\ell\theta) \end{aligned}}.$$

Para $\ell = 0$, esta intensidade modal não depende de θ e é simplesmente dada por $I(r) \propto \xi^2(r)$.

O corte de um dado modo superficial corresponde a fazer $w = 0$, donde

$$\text{corte} \mapsto \boxed{J_{\ell-1}(v_c) = 0}.$$

Os modos superficiais que se propagam na fibra (de acordo com esta aproximação de pequeno contraste dielétrico) são denominados modos quase *linearmente polarizados* ou modos $LP_{\ell m}$ onde o primeiro índice ℓ corresponde (como se viu) à variação azimutal (i.e., com a variável θ) do campo electromagnético e o segundo índice m corresponde à variação radial (i.e., com a variável r). O primeiro modo superficial que se propaga na fibra óptica – o *modo fundamental* – é o modo que corresponde a $\ell = 0$ e a $m = 1$, i.e., o modo LP_{01} . Este modo tem um corte dado por $v_c = 0$ (i.e., não existe um limite mínimo para a frequência de operação deste modo – embora, como é óbvio, este modo só está verdadeiramente confinado à fibra para valores significativos da frequência normalizada). O segundo modo a propagar-se na fibra é o modo correspondente a $\ell = 1$ e a $m = 1$, i.e., é o modo LP_{11} . A frequência normalizada v_c de corte deste segundo modo é a primeira raiz da equação

$$\boxed{J_0(v_c) = 0} \mapsto v_c = 2.40482555769577\dots \approx 2.4048.$$

A Fig. 24 mostra o andamento das funções de Bessel de primeira espécie e ordem $\ell = 0, 1, 2, 3$.

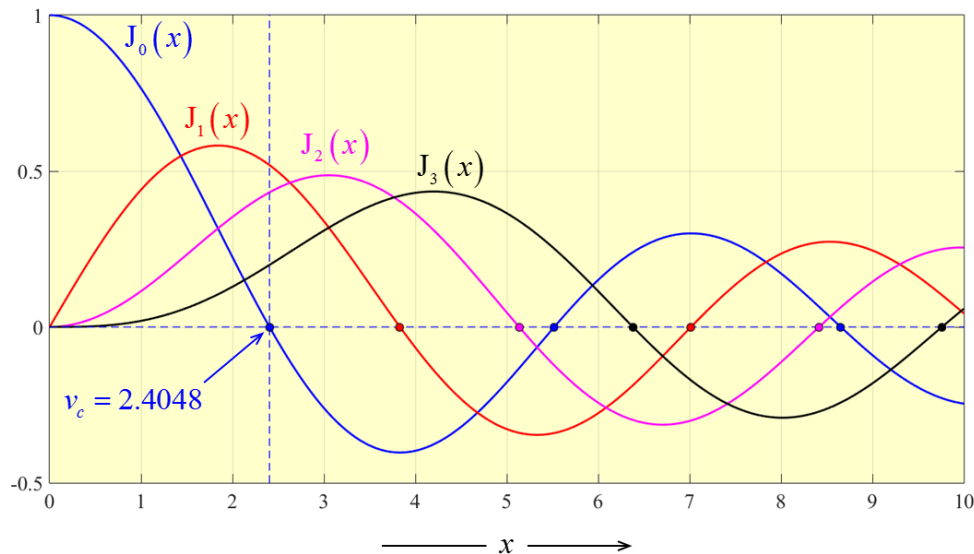


Figura 24

Os modos LP são, em rigor, *modos híbridos* porque têm $E_z \neq 0$ e $H_z \neq 0$. Contudo, na aproximação de pequeno contraste dieléctrico, tem-se $E_z \approx 0$ e $H_z \approx 0$ (i.e., as componentes longitudinais do campo electromagnético são desprezáveis em comparação com as componentes transversais). Ou seja: é uma razoável aproximação considerar que o campo é quase TEM (i.e., que o campo electromagnético reside, na prática, no plano transversal xy). Além disso o campo encontra-se (quase) linearmente polarizado. Existem, assim, duas polarizações lineares ortogonais – uma polarização segundo x e uma polarização segundo y . Isto significa que, de facto, existem dois modos possíveis – mesmo para $v < v_c = 2.4048$, a saber: um modo LP_{01} polarizado segundo x (que designaremos por LP_{01}^x) e outro modo LP_{01} polarizado segundo y (que designaremos por LP_{01}^y). Na verdade, qualquer modo do tipo LP_{0m} pode ter duas polarizações possíveis: LP_{0m}^x e LP_{0m}^y . No caso dos modos $LP_{\ell m}$, com $\ell \neq 0$, existem – na verdade – quatro modos superficiais possíveis: um modo com variação azimutal do tipo $\cos(\ell\theta)$ com duas polarizações diferentes e um modo com variação azimutal do tipo $\sin(\ell\theta)$ que (também) pode ter duas polarizações ortogonais. Por exemplo: para o modo LP_{11} existem quatro possibilidades:

$$LP_{11}^x[\cos(\theta)], \quad LP_{11}^y[\cos(\theta)], \quad LP_{11}^x[\sin(\theta)], \quad LP_{11}^y[\sin(\theta)].$$

Podemos, então, construir uma tabela com os zeros de $J_\ell(x)$ – ver a respectiva Tabela na página seguinte. Com esta tabela determina-se a sequência do aparecimento dos vários modos superficiais $LP_{\ell m}$ por ordem crescente da frequência normalizada v . Note-se que

$$J_\ell(x) = x^\ell \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{2^{2k+\ell} k! (\ell+k)!}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} J_\ell(x) = 0, \quad \ell = 0, 1, 2, \dots$$

$$J_\ell(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos \left[x - \left(\ell + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{2} \right], \quad x \gg 1.$$

Assim, para $x \gg 1$, os zeros $x_{\ell m}$ de $J_\ell(x)$ são, aproximadamente, dados por

$$x_{\ell m} \approx \left(\ell + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{2} + (2m-1) \frac{\pi}{2} = \left(\ell + 2m - \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{2}.$$

Portanto, para um dado modo $LP_{\ell m}$ com um índice radial m muito elevado, é aproximadamente

$$v_c \approx (\ell + 2m) \frac{\pi}{2}, \quad \ell = 0, 1, 2, \dots, \quad m \gg 1.$$

Zeros de $J_\ell(x)$					
$\ell = 0$	2.4048	5.5201	8.6537	11.7915	14.9309
	18.0711	21.2116	24.3525	27.4935	30.6346
$\ell = 1$	3.8317	7.0156	10.1735	13.3237	16.4706
	19.6159	22.7601	25.9037	29.0468	32.1897
$\ell = 2$	5.1356	8.4172	11.6198	14.7960	17.9598
	21.1170	24.2701	27.4206	30.5692	33.7165
$\ell = 3$	6.3802	9.7610	13.0152	16.2235	19.4094
	22.5827	25.7482	28.9084	32.0649	35.2187
$\ell = 4$	7.5883	11.0647	14.3725	17.6160	20.8269
	24.0190	27.1991	30.3710	33.5371	36.6990
$\ell = 5$	8.7715	12.3386	15.7002	18.9801	22.2178
	25.4303	28.6266	31.8117	34.9888	38.1599
$\ell = 6$	9.9361	13.5893	17.0038	20.3208	23.5861
	26.8202	30.0337	33.2330	36.4220	39.6032
$\ell = 7$	11.0864	14.8213	18.2876	21.6415	24.9349
	28.1912	31.4228	34.6371	37.8387	41.0308

A tabela seguinte mostra, a partir desta tabela, a sequência dos modos para uma frequência normalizada $v=10$. Para este valor da frequência normalizada (i.e., para $v=10$) propagam-se $N=15$ modos do tipo $LP_{\ell m}$.

$v = 10$	↦	LP ₀₁	↦	$v_c = 0$
		LP ₁₁	↦	$v_c = 2.4048$
		LP ₂₁	↦	$v_c = 3.8317$
		LP ₀₂	↦	$v_c = 3.8317$
		LP ₃₁	↦	$v_c = 5.1356$
		LP ₁₂	↦	$v_c = 5.5201$
		LP ₄₁	↦	$v_c = 6.3802$
		LP ₂₂	↦	$v_c = 7.0156$
		LP ₀₃	↦	$v_c = 7.0156$
		LP ₅₁	↦	$v_c = 7.5883$
		LP ₃₂	↦	$v_c = 8.4172$
		LP ₁₃	↦	$v_c = 8.6537$
		LP ₆₁	↦	$v_c = 8.7715$
		LP ₄₂	↦	$v_c = 9.7610$
LP ₇₁	↦	$v_c = 9.9361$		

Existem bifurcações modais – no sentido em que existem pares de modos com o mesmo valor de v_c – para alguns modos: é o caso do par de modos LP₂₁ e LP₀₂ e do par de modos LP₂₂ e LP₀₃. A Fig. 25 mostra o número M de modos em função da frequência normalizada v .

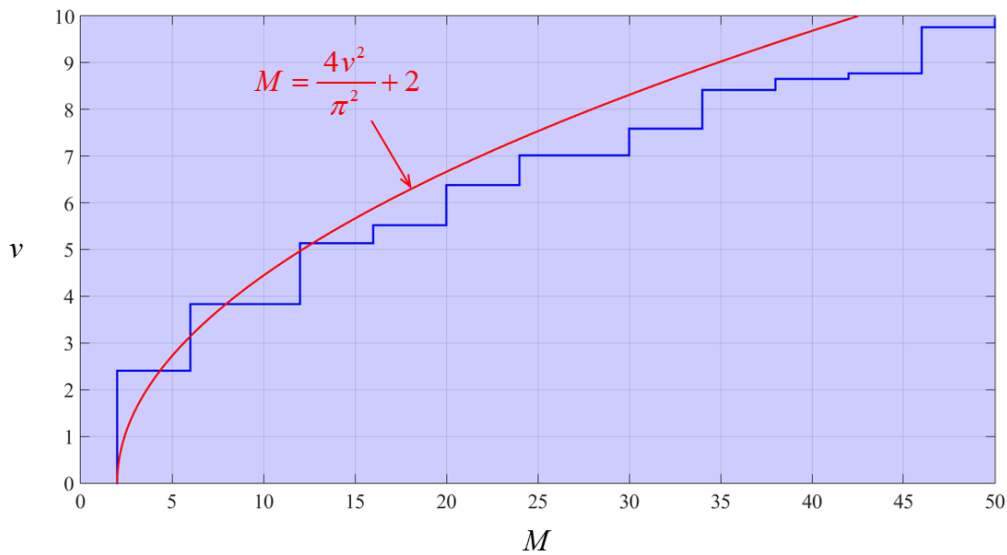


Figura 25

Quando $v \gg 1$, o número total M de modos é aproximadamente dado pela fórmula

$$M = \frac{4v^2}{\pi^2} + 2.$$

Esta fórmula aproximada é representada pela curva apresentada na Fig. 25. Por exemplo: para $v = 10$ existem, de facto, $M = 50$ modos; a fórmula aproximada dá $M \approx 43$ modos. Uma fibra óptica com $n_1 = 1.46$ e um contraste dieléctrico de 0.5% (i.e., com $\Delta = 0.005$) tem uma abertura numérica $NA = n_1 \sqrt{2\Delta} = 0.146$. Logo, para $\lambda = 0.85 \mu\text{m}$ e $a = 25 \mu\text{m}$, esta fibra multimodal tem uma frequência normalizada $v = 26.9807$ e, conseqüentemente, cerca de $M \approx 297$ modos.

Vejamos, agora, como resolver graficamente a equação modal. Consideremos, apenas, o caso em que $\ell = 0$, i.e., vamos considerar o caso dos modos LP_{0m} . Neste caso a equação modal assume a forma particular (tanto o sinal + como sinal - conduzem à mesma equação)

$$\begin{array}{l} \text{modos} \\ LP_{0m} \end{array} \mapsto \boxed{\ell = 0} \mapsto \boxed{u \frac{J_1(u)}{J_0(u)} = \sqrt{v^2 - u^2} \frac{K_1(\sqrt{v^2 - u^2})}{K_0(\sqrt{v^2 - u^2})}}.$$

Para um dado valor da frequência normalizada v a intersecção das curvas que representam o lado esquerdo desta equação com a curva que representa o lado direito permite obter as soluções modais. A Fig. 26 ilustra este resultado para o caso em que $v = 10$. Obtêm-se, então, três soluções correspondentes aos modos LP_{01} , LP_{02} e LP_{03} . A saber:

$$\boxed{v = 10} \mapsto \boxed{\begin{array}{l} LP_{01} \mapsto u_{01} = 2.1845 \mapsto w_{01} = 9.7585 \mapsto b_{01} = 0.9523 \\ LP_{02} \mapsto u_{02} = 4.9966 \mapsto w_{02} = 8.6622 \mapsto b_{02} = 0.7503 \\ LP_{03} \mapsto u_{03} = 7.7642 \mapsto w_{03} = 6.3022 \mapsto b_{03} = 0.3972 \end{array}}.$$

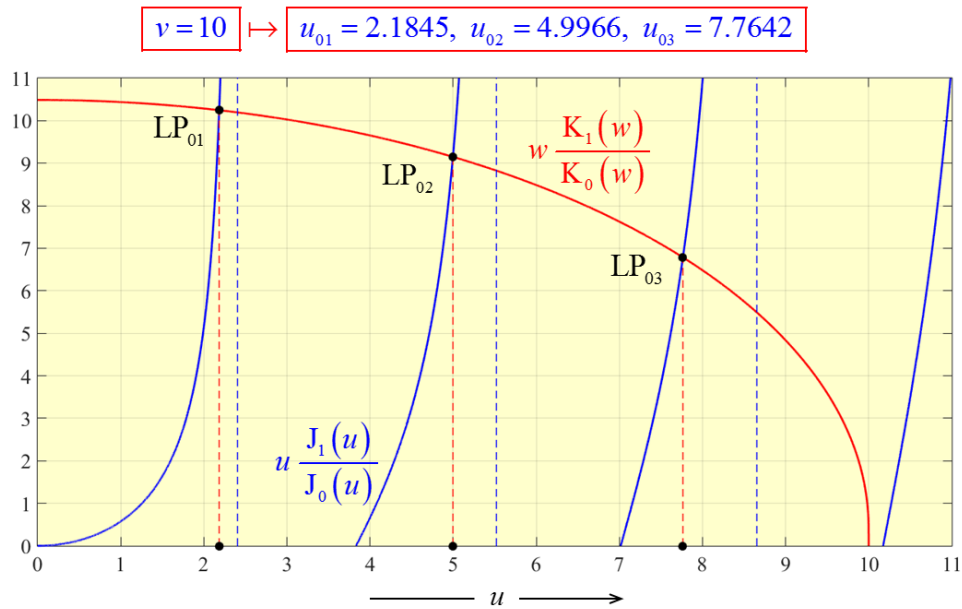


Figura 26

Na Fig. 27 mostra-se o andamento da função modal $\xi^2(r)$ para cada uma das soluções que foram obtidas na Fig. 26 (trata-se, portanto, do perfil radial de cada modo). Note-se que os modos com $\ell = 0$ só apresentam variação radial – não têm variação azimutal.

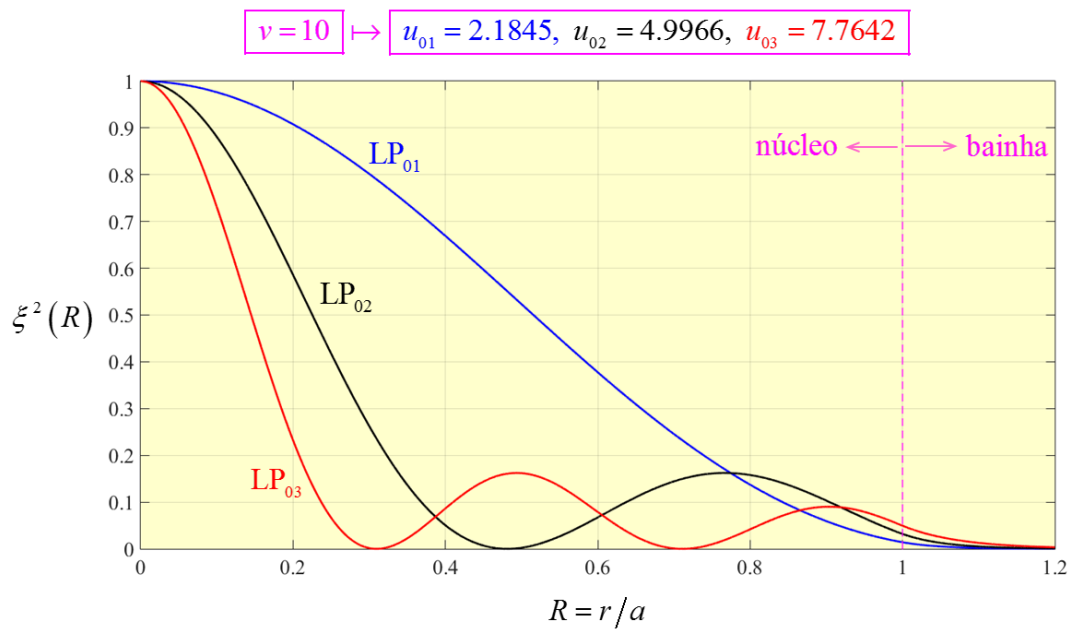


Figura 27

Na Fig. 27 considerou-se

$$\boxed{R = \frac{r}{a}} \mapsto \boxed{\xi^2(R) = \begin{cases} J_0^2(Ru_m), & 0 \leq R \leq 1, \\ \frac{J_0^2(u_m)}{K_0^2(w_m)} K_0^2(Rw_m), & R \geq 1. \end{cases}}$$

Na Fig. 28 apresenta-se, então, o diagrama de dispersão $b = b(v)$ para os primeiros quatro modos superficiais $LP_{\ell m}$ da fibra óptica.

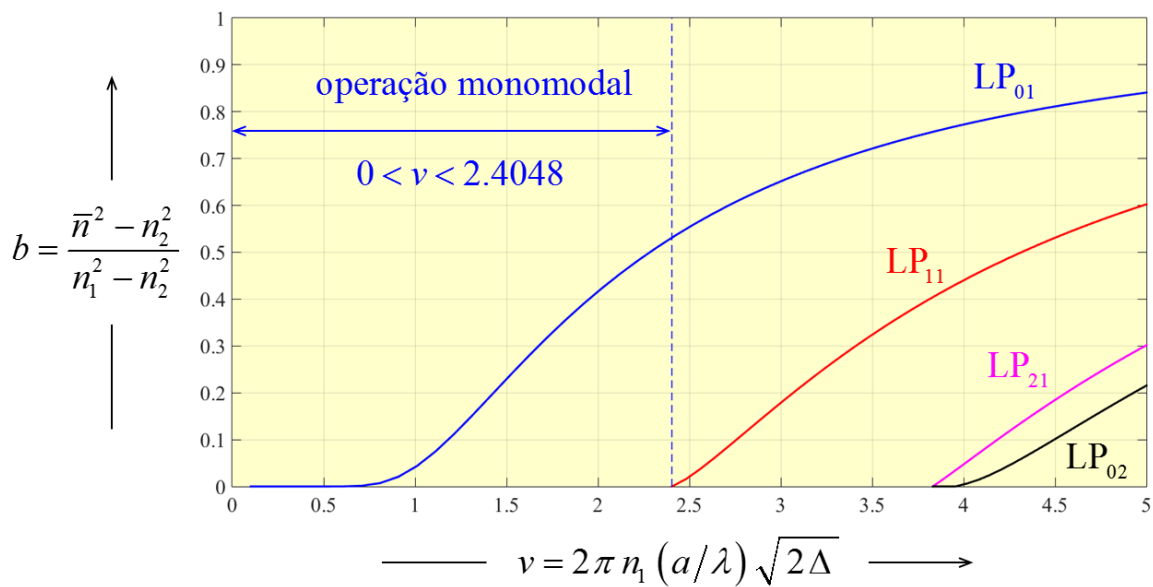


Figura 28